三角函数的诱导公式解题方法与技巧-高中数学必修4第一章

**一、关于的关系的推广应用：**

1、由于故知道，必可推出，例如：

例1 已知。

分析：由于



其中，已知，只要求出即可，此题是典型的知sin-cos，求sincos的题型。

解：∵

故：





例2 若sin+cos=m2，且tg+ctg=n，则m2 n的关系为（ ）。

A．m2=n B．m2= C． D．

分析：观察sin+cos与sincos的关系：

sincos=

而：

故：，选B。

例3 已知：tg+ctg=4，则sin2的值为（ ）。

A． B． C． D．

分析：tg+ctg=

故：。 答案选A。

例4 已知：tg+ctg=2，求

分析：由上面例子已知，只要能化出含sin±cos或sincos的式子，则即可根据已知tg+ctg进行计算。由于tg+ctg=

，此题只要将化成含sincos的式子即可：

解：=+2 sin2cos2-2 sin2cos2

=（sin2+cos2）- 2 sin2cos2

=1-2 (sincos)2

=1-

=

=

通过以上例子，可以得出以下结论：由于，sincos及tg+ctg三者之间可以互化，知其一则必可知其余二。这种性质适合于隐含此三项式子的三角式的计算。但有一点要注意的；如果通过已知sincos，求含的式子，必须讨论其象限才能得出其结果的正、负号。这是由于（）2=1±2sincos，要进行开方运算才能求出

**二、关于“托底”方法的应用：**

在三角函数的化简计算或证明题中，往往需要把式子添加分母，这常用在需把含tg（或ctg）与含sin（或cos）的式子的互化中，本文把这种添配分母的方法叫做“托底”法。方法如下：

例5 已知：tg=3，求的值。

分析：由于，带有分母cos，因此，可把原式分子、分母各项除以cos，“造出”tg，即托出底：cos；

解：由于tg=3

故，原式=

例6 已知：ctg= -3，求sincos-cos2=?

分析：由于，故必将式子化成含有的形式，而此题与例4有所不同，式子本身没有分母，为了使原式先出现分母，利用公式：及托底法托出其分母，然后再分子、分母分别除以sin，造出ctg：

解：

 



例7 （95年全国成人高考理、工科数学试卷）

设，

求：的值

分析：此题是典型已知含正弦函数的等式求含正切、余切的式子，故要用“托底法”，由于，故，在等式两边同除以，托出分母为底，得：

解：由已知等式两边同除以得：





“托底”适用于通过同角的含正弦及余弦的式子与含正切、余切的式子的互化的计算。由于，，即正切、余切与正弦、余弦间是比值关系，故它们间的互化需“托底”，通过保持式子数值不变的情况下添加分母的方法，使它们之间可以互相转化，达到根据已知求值的目的。而添加分母的方法主要有两种：一种利用，把作为分母，并不改变原式的值，另一种是通过等式两边同时除以正弦或余弦又或者它们的积，产生分母。

**三、关于形如：的式子，在解决三角函数的极值问题时的应用：**

可以从公式中得到启示：式子与上述公式有点相似，如果把a，b部分变成含sinA，cosA的式子，则形如的式子都可以变成含的式子，由于-1≤≤1，

所以，可考虑用其进行求极值问题的处理，但要注意一点：不能直接把a当成sinA，b当成cosA，如式子：中，不能设sinA=3，cosA=4，考虑：-1≤sinA≤1，-1≤cosA≤1，可以如下处理式子：



由于。

故可设：，则，即：

∴

无论取何值，-1≤sin(A±x)≤1，

≤≤

即：≤≤

下面观察此式在解决实际极值问题时的应用：

例1（98年全国成人高考数学考试卷）

求：函数的最大值为（AAAA ）

A． B． C． D．

分析：，再想办法把变成含的式子：

于是：





由于这里：

∴

设：

∴



无论A-2x取何值，都有-1≤sin(A-2x)≤1，故≤≤

∴的最大值为，即答案选A。

例2 （96年全国成人高考理工科数学试卷）

在△ABC中，已知：AB=2，BC=1，CA=，分别在边AB、BC、CA上任取点D、E、F，使△DEF为正三角形，记∠FEC=∠α，问：sinα取何值时，△EFD的边长最短？并求此最短边长。

分析：首先，由于，可知△ABC为Rt△，其中AB为斜边，所对角∠C为直角，又由于，则∠B=

90°—∠A=60°，由于本题要计算△DEF的最短边长，故必要设正△DEF的边长为，且要列出有关为未知数的方程，对进行求解。观察△BDE，已知：∠B=60°，DE=，再想办法找出另两个量，即可根据正弦定理列出等式，从而产生关于的方程。在图中，由于EC=·cosα，则BE=BC-EC=1-·cosα。

而∠B+∠BDE+∠1=180°

∠α+∠DEF+∠1=180° ∠BDE=∠α

∠B=60°，∠DEF=60°

∴在△BDE中，根据正弦定理：







在这里，要使有最小值，必须分母：有最大值，观察：

∴

设：，则

故：



∴的最大值为。

即：的最小值为：

而取最大值为1时，

∴

即：时，△DEF的边长最短，最短边长为。

从以上例子可知，形如适合于计算三角形函数的极值问题。计算极值时与式子的加、减是无关，与的最值有关；其中最大值为，最小值为。在计算三角函数的极值应用题时，只要找出形如的关系式，即能根据题意，求出相关的极值。

**三角函数知识点解题方法总结**

一、见“给角求值”问题，运用“新兴”诱导公式

　　一步到位转换到区间（-90º，90º）的公式.

　　1.sin(kπ+α)=(-1)ksinα(k∈Z)；2. cos(kπ+α)=(-1)kcosα(k∈Z)；

　　3. tan(kπ+α)=(-1)ktanα(k∈Z)；4. cot(kπ+α)=(-1)kcotα(k∈Z).

　　二、见“sinα±cosα”问题，运用三角“八卦图”  
1.sinα+cosα>0(或<0)óα的终边在直线y+x=0的上方（或下方）;

　　2. sinα-cosα>0(或<0)óα的终边在直线y-x=0的上方（或下方）;

　　3.|sinα|>|cosα|óα的终边在Ⅱ、Ⅲ的区域内;

　　4.|sinα|<|cosα|óα的终边在Ⅰ、Ⅳ区域内.

　　三、见“知1求5”问题，造Rt△，用勾股定理，熟记常用勾股数（3，4，5），（5，12，13），（7，24，25），仍然注意“符号看象限”。

　　四、见“切割”问题，转换成“弦”的问题。

　　五、“见齐思弦”=>“化弦为一”：已知tanα,求sinα与cosα的齐次式，有些整式情形还可以视其分母为1，转化为sin2α+cos2α.

　　六、见“正弦值或角的平方差”形式，启用“平方差”公式：

　　1.sin(α+β)sin(α-β)= sin2α-sin2β;2. cos(α+β)cos(α-β)= cos2α-sin2β.

　　七、见“sinα±cosα与sinαcosα”问题，起用平方法则：

　　(sinα±cosα)2=1±2sinαcosα=1±sin2α,故

　　1.若sinα+cosα=t,(且t2≤2),则2sinαcosα=t2-1=sin2α;

　　2.若sinα-cosα=t,(且t2≤2),则2sinαcosα=1-t2=sin2α.

　　八、见“tanα+tanβ与tanαtanβ”问题，启用变形公式:

　　tanα+tanβ=tan(α+β)(1-tanαtanβ).思考：tanα-tanβ=？？？

　　九、见三角函数“对称”问题，启用图象特征代数关系：(A≠0)

　　1.函数y=Asin(wx+φ)和函数y=Acos(wx+φ)的图象，关于过最值点且平行于y轴的直线分别成轴对称；

　　2.函数y=Asin(wx+φ)和函数y=Acos(wx+φ)的图象，关于其中间零点分别成中心对称；

　　3.同样，利用图象也可以得到函数y=Atan(wx+φ)和函数y=Acot(wx+φ)的对称性质。

　　十、见“求最值、值域”问题，启用有界性，或者辅助角公式：

　　1.|sinx|≤1,|cosx|≤1;2.(asinx+bcosx)2=(a2+b2)sin2(x+φ)≤(a2+b2);

　　3.asinx+bcosx=c有解的充要条件是a2+b2≥c2.

　　十一、见“高次”，用降幂，见“复角”，用转化.

　　1.cos2x=1-2sin2x=2cos2x-1.

　　2.2x=(x+y)+(x-y);2y=(x+y)-(x-y);x-w=(x+y)-(y+w)等

角函数公式   
两角和公式   
sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB   
sin(A-B)=sinAcosB-sinBcosA    
cos(A+B)=cosAcosB-sinAsinB   
cos(A-B)=cosAcosB+sinAsinB   
tan(A+B)=(tanA+tanB)/(1-tanAtanB)   
tan(A-B)=(tanA-tanB)/(1+tanAtanB)   
cot(A+B)=(cotAcotB-1)/(cotB+cotA)    
cot(A-B)=(cotAcotB+1)/(cotB-cotA)   
倍角公式   
tan2A=2tanA/[1-(tanA)^2]   
cos2a=(cosa)^2-(sina)^2=2(cosa)^2 -1=1-2(sina)^2   
sin2A=2sinA\*cosA

半角公式

sin^2(α/2)=(1-cosα)/2 cos^2(α/2)=(1+cosα)/2 tan^2(α/2)=(1-cosα)/(1+cosα)

和差化积   
2sinAcosB=sin(A+B)+sin(A-B)   
2cosAsinB=sin(A+B)-sin(A-B) )   
2cosAcosB=cos(A+B)+cos(A-B)   
-2sinAsinB=cos(A+B)-cos(A-B)   
sinA+sinB=2sin((A+B)/2)cos((A-B)/2   
cosA+cosB=2cos((A+B)/2)sin((A-B)/2)   
tanA+tanB=sin(A+B)/cosAcosB   
积化和差公式   
sin(a)sin(b)=-1/2\*[cos(a+b)-cos(a-b)]   
cos(a)cos(b)=1/2\*[cos(a+b)+cos(a-b)]   
sin(a)cos(b)=1/2\*[sin(a+b)+sin(a-b)]

万能公式   
sin(a)= (2tan(a/2))/(1+tan^2(a/2))   
cos(a)= (1-tan^2(a/2))/(1+tan^2(a/2))   
tan(a)= (2tan(a/2))/(1-tan^2(a/2))

倒数关系: 商的关系： 平方关系：   
tanα ·cotα＝1   
sinα ·cscα＝1   
cosα ·secα＝1 sinα/cosα＝tanα＝secα/cscα   
cosα/sinα＝cotα＝cscα/secα sin2α＋cos2α＝1   
1＋tan2α＝sec2α   
1＋cot2α＝csc2α