圆的方程考点-高中数学必修2第四章

【考点导读】

1. 掌握圆的标准方程与一般方程，能根据问题的条件选择适当的形式求圆的方程；理解圆的标准方程与一般方程之间的关系，会进行互化。
2. 本节内容主要考查利用待定系数法求圆的方程，利用三角换元或数形结合求最值问题，题型难度以容易题和中档题为主.

【基础练习】

1.已知点A(3，－2)，B(－5，4)，以线段AB为直径的圆的方程为(*x* + 1)2 + (*y*－1)2 = 25

2.过点*A*（1，－1）、*B*（－1，1）且圆心在直线*x*＋*y*－2＝0上的圆的方程是（*x*－1）2＋（*y*－1）2＝4

3.已知圆C的半径为2，圆心在轴的正半轴上，直线与圆C相切，则圆C的方程为

4.圆与*y*轴交于A、B两点，圆心为P，若∠APB=120°，则实数*c*值为\_-11\_\_

5.如果方程所表示的曲线关于直线对称，那么必有\_\_D=E\_\_

【范例导析】

1. 设方程，若该方程表示一个圆，求m的取值范围及这时圆心的轨迹方程。

分析:配成圆的标准方程再求解

解：配方得： 该方程表示圆，则有，得，此时圆心的轨迹方程为，消去*m*，得，由得*x*=*m*+3所求的轨迹方程是，

注意：方程表示圆的充要条件，求轨迹方程时，一定要讨论变量的取值范围，如题中

变式1：方程表示圆，求实数a的取值范围，并求出其中半径最小的圆的方程。

解：原方程可化为

当a时，原方程表示圆。

又

当，所以半径最小的圆方程为

**例2** 求半径为4，与圆相切，且和直线相切的圆的方程．

**分析：**根据问题的特征，宜用圆的标准方程求解．

**解：**则题意，设所求圆的方程为圆．

圆与直线相切，且半径为4，则圆心的坐标为或．

又已知圆的圆心的坐标为，半径为3．

若两圆相切，则或．

(1)当时，，或(无解)，故可得．

∴所求圆方程为，或．

(2)当时，，或(无解)，故．

∴所求圆的方程为，或．

**说明：**对本题，易发生以下误解：

由题意，所求圆与直线相切且半径为4，则圆心坐标为，且方程形如．又圆，即，其圆心为，半径为3．若两圆相切，则．故，解之得．所以欲求圆的方程为，或．

上述误解只考虑了圆心在直线上方的情形，而疏漏了圆心在直线下方的情形．另外，误解中没有考虑两圆内切的情况．也是不全面的．

**点评：**在解决求圆的方程这类问题时，应当注意以下几点：（1）确定圆方程首先明确是标准方程还是一般方程；（2）根据几何关系（如本例的相切、弦长等）建立方程求得*a*、*b*、*r*或*D*、*E*、*F*；（3）待定系数法的应用，解答中要尽量减少未知量的个数.

1. 设圆满足:①截y轴所得弦长为2;②被*x*轴分成两段圆弧,其弧长的比为3:1,在满足条件①、②的所有圆中,求圆心到直线*l*:*x*-2*y*=0的距离最小的圆的方程.

分析:注意挖掘题目的条件,充分利用圆的几何性质解决问题.

**解法一**:设圆心为P(*a*,*b*),半径为*r*,则点P到*x*轴,*y*轴的距离分别为│*b*│,│*a*│.

由题设圆P截x轴所得劣弧对的圆心角为900，知圆P截x轴的弦长为，故r2=2b2

又圆P截*y*轴所得的弦长为2,所以有*r*2=*a*2+1.从而得2*b*2-*a*2=1.

又点P(*a*,*b*)到直线x2y=0的距离为

所以5*d*2=│*a*-2*b*│2=*a*2+4*b*2-4*ab*

≥*a*2+4*b*2-2(*a*2+*b*2)=2*b*2-*a*2=1,

当且仅当*a*=*b*时上式等号成立,此时5*d*2=1,从而*d*取得最小值.

由此有

解此方程组得

由于*r*2=2*b*2知于是,所求圆的方程是:

(*x*-1)2+(*y*-1)2=2,或(*x*+1)2+(*y*+1)2=2.

**解法二:**同解法一得



将*a*2=2*b*2-1代入上式,整理得

 ②

把它看作*b*的二次方程,由于方程有实根,故判别式非负,即

△=8(5*d*2-1)≥0, 得 5*d*2≥1.

所以5*d*2有最小值1，从而*d*有最小值

将其代入②式得2*b*2±4*b*+2=0.解得*b*=±1.

将*b*=±1代入*r*2=2*b*2,得*r*2=2.由*r*2=*a*2+1得*a*=±1.

综上 *a*=±1*,b*=±1,*r*2=2.

由│*a*-2*b*│=1知*a*,*b*同号.于是,所求圆的方程是

(*x*-1)2+(*y*-1)2=2,或(*x*+1)2+(*y*+1)2=2.

点拨:求圆的方程通常有两类方法,一是几何法,即通过研究圆的性质、直线和圆、圆和圆的位置关系进而求得圆的基本量（圆心、半径）和圆的方程,二是代数法,即根据题意设出圆的方程,再利用条件得到有关方程系数的方程组,解方程组得到方程系数,从而求出圆的方程.

【例4】在平面直角坐标系中，已知圆心在第二象限、半径为的圆与直线相切于坐标原点．椭圆与圆的一个交点到椭圆两焦点的距离之和为．

(1)求圆的方程；

(2)试探究圆上是否存在异于原点的点，使到椭圆右焦点的距离等于线段的长．若存在，请求出点的坐标；若不存在，请说明理由．

分析:问题（2）可以转化为探求以右焦点F为顶点，半径为4的圆(*x*─4)2+*y*2=8与(1)所求的圆的交点数。

解： (1)设圆心坐标为(*m*，*n*)（*m*<0，*n*>0）,则该圆的方程为(*x*-*m*)2+(*y*-*n*)2=8已知该圆与直线*y*=*x*相切，那么圆心到该直线的距离等于圆的半径，则

=2

即=4 ①

又圆与直线切于原点，将点(0，0)代入得

m2+n2=8 ②

联立方程①和②组成方程组解得



故圆的方程为(x+2)2+(y-2)2=8



(2)=5，∴a2=25，则椭圆的方程为 + =1

其焦距c==4，右焦点为(4，0)，那么=4。

要探求是否存在异于原点的点Q，使得该点到右焦点F的距离等于的长度4，我们可以转化为探求以右焦点F为顶点，半径为4的圆(*x*─4)2+*y*2=8与(1)所求的圆的交点数。

通过联立两圆的方程解得*x*=，*y*=

即存在异于原点的点Q(，)，使得该点到右焦点F的距离等于的长。

点拨:解决圆的综合问题时,一方面要充分利用圆的平面几何知识来解决问题,另一方面还要注意几何问题代数化的思想运用.

**反馈练习：**

1.关于x,y的方程Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0表示一个圆的充要条件是B=0且A=C≠0,D2+E2-4AF＞0

2.过点P(-8，-1)，Q(5，12)，R(17，4)三点的圆的圆心坐标是(5，-1)

3.若两直线y=x+2k与y=2x+k+1的交点P在圆x2+y2=4的内部，则k的范围是

4.已知圆心为点（2，-3），一条直径的两个端点恰好落在两个坐标轴上，则这个圆的方程是

5.直线y=3x+1与曲线x2+y2=4相交于A、B两点，则AB的中点坐标是

6.方程表示的曲线是\_两个半圆

7.圆关于直线的对称圆的方程是

8.如果实数x、y满足等式，那么的最大值是

9.已知点和圆，求一束光线从点A经x轴反射到圆周C的最短路程为\_\_\_8\_\_\_

10．求经过点A(5,2),B(3,2),圆心在直线2x─y─3=0上的圆的方程;

解：设圆心P(x0,y0),则有,

解得 x0=4, y0=5,

∴半径r=,

∴所求圆的方程为(x─4)2+(y─5)2=10**[](http://www.xjktyg.com/wxc/)**

11. 一圆与*y*轴相切，圆心在直线*x*－3*y*=0上，且直线*y*=*x*截圆所得弦长为2，求此圆的方程**[](http://www.xjktyg.com/wxc/)**

解：因圆与*y*轴相切，且圆心在直线*x*－3*y*=0上，

故设圆方程为**[](http://www.xjktyg.com/wxc/)**

又因为直线*y*=*x*截圆得弦长为2，

则有+=9*b*2，

解得*b*=±1**[](http://www.xjktyg.com/wxc/)**故所求圆方程为

或**[](http://www.xjktyg.com/wxc/)**

点拨:（1）确定圆方程首先明确是标准方程还是一般方程；（2）待定系数法;（3）尽量利用几何关系求*a*、*b*、*r*或*D*、*E*、*F*.

12.在直角坐标系中，以为圆心的圆与直线相切．

（1）求圆的方程；

（2）圆与轴相交于两点，圆内的动点使成等比数列，求的取值范围．

解：（1）依题设，圆的半径等于原点到直线的距离，

即 ．

得圆的方程为．

（2）不妨设．由即得

．

设，由成等比数列，得

，

即 ．





由于点在圆内，故

由此得．

所以的取值范围为．