二次函数与一元二次方程

知识点梳理

1. 定义：一般地，如果 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq 0)$，那么 y 叫做 x 的二次函数.

2. 二次函数 $y=ax^2$ 的性质

（1）抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是坐标原点，对称轴是 y 轴.

（2）函数 $y=ax^2$ 的图像与 a 的符号关系.

①当 $a>0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向上 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最低点；

②当 $a<0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向下 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最高点.

（3）顶点是坐标原点，对称轴是 y 轴的抛物线的解析式形式为 $y=ax^2$（$a\neq 0$）.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是对称轴平行于（包括重合）y 轴的抛物线.

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 用配方法可化成：$y=a(x-h)^2+k$ 的形式，其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

5. 二次函数由特殊到一般，可分为以下几种形式：① $y=ax^2$；② $y=ax^2+k$；③ $y=a(x-h)^2$；④ $y=a(x-h)^2+k$；⑤ $y=ax^2+bx+c$.

6. 抛物线的三要素：开口方向、对称轴、顶点.

①a 的符号决定抛物线的开口方向：当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下；

$|a|$ 相等，抛物线的开口大小、形状相同.

②平行于 y 轴（或重合）的直线记作 $x=h$. 特别地，y 轴记作直线 $x=0$.

7. 顶点决定抛物线的位置. 几个不同的二次函数，如果二次项系数 a 相同，那么抛物线的开口方向、开口大小完全相同，只是顶点的位置不同.

8. 求抛物线的顶点、对称轴的方法（1）公式法：$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，∴顶点是$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$.

（2）配方法：运用配方的方法，将抛物线的解析式化为$y=a(x-h)^2+k$的形式，得到顶点为(h,k)，对称轴是直线$x=h$.

（3）运用抛物线的对称性：由于抛物线是以对称轴为轴的轴对称图形，所以对称轴的连线的垂直平分线是抛物线的对称轴，对称轴与抛物线的交点是顶点.

用配方法求得的顶点，再用公式法或对称性进行验证，才能做到万无一失.

9. 抛物线$y=ax^2+bx+c$中，a,b,c的作用

（1）a决定开口方向及开口大小，这与$y=ax^2$中的a完全一样.

（2）b和a共同决定抛物线对称轴的位置. 由于抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$，故：①$b=0$时，对称轴为y轴；②$\frac{b}{a}>0$（即a、b同号）时，对称轴在y轴左侧；③$\frac{b}{a}<0$（即a、b异号）时，对称轴在y轴右侧.

（3）c的大小决定抛物线$y=ax^2+bx+c$与y轴交点的位置.

当$x=0$时，$y=c$，∴抛物线$y=ax^2+bx+c$与y轴有且只有一个交点（0，c）：

①$c=0$，抛物线经过原点；②$c>0$，与y轴交于正半轴；③$c<0$，与y轴交于负半轴.

以上三点中，当结论和条件互换时，仍成立. 如抛物线的对称轴在y轴右侧，则$\frac{b}{a}<0$.

10. 几种特殊的二次函数的图像特征如下：

函数解析式	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=ax^2$	当$a>0$时开口向上 当$a<0$时开口向下	$x=0$（y轴）	$(0,0)$
$y=ax^2+k$		$x=0$（y轴）	$(0,\ k)$
$y=a(x-h)^2$		$x=h$	$(h,0)$
$y=a(x-h)^2+k$		$x=h$	(h,k)

$y=ax^2+bx+c$		$x=-\frac{b}{2a}$	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

11. 用待定系数法求二次函数的解析式

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$. 已知图像上三点或三对 x、y 的值，通常选择一般式.

（2）顶点式：$y=a(x-h)^2+k$. 已知图像的顶点或对称轴，通常选择顶点式.

（3）交点式：已知图像与 x 轴的交点坐标 x_1、x_2，通常选用交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

12. 直线与抛物线的交点

（1）y 轴与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 得交点为(0, c).

（2）与 y 轴平行的直线 $x=h$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有且只有一个交点(h, ah^2+bh+c).

（3）抛物线与 x 轴的交点

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标 x_1、x_2，是对应一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根. 抛物线与 x 轴的交点情况可以由对应的一元二次方程的根的判别式判定：

①有两个交点 $\Leftrightarrow \Delta>0$ $\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴相交；

②有一个交点（顶点在 x 轴上） $\Leftrightarrow \Delta=0$ $\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴相切；

③没有交点 $\Leftrightarrow \Delta<0$ $\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴相离.

（4）平行于 x 轴的直线与抛物线的交点

同（3）一样可能有 0 个交点、1 个交点、2 个交点. 当有 2 个交点时，两交点的纵坐标相等，设纵坐标为 k，则横坐标是 $ax^2+bx+c=k$ 的两个实数根.

（5）一次函数 $y=kx+n(k\neq 0)$ 的图像 l 与二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像 G 的交点，由方程组 $\begin{cases}y=kx+n\\y=ax^2+bx+c\end{cases}$ 的解的数目来确定：①方程组有两组不同的解时 $\Leftrightarrow$ l 与 G 有两个交点；②方程组只有一组解时 $\Leftrightarrow$ l 与 G 只有一个交点；③方程组无解时 $\Leftrightarrow$ l 与 G 没有交点.

（6）抛物线与 x 轴两交点之间的距离：若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴两交点为 $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$，由于 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，故 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$$AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

例题精讲

【例 1】已抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1$（m 为实数）。

（1）m 为何值时，抛物线与 x 轴有两个交点？
（2）如果抛物线与 x 轴相交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，且△ABC 的面积为 2，求该抛物线的解析式。

分析：抛物线与 x 轴有两个交点，则对应的一元二次方程有两个不相等的实数根，将问题转化为求一元二次方程有两个不相等的实数根 m 应满足的条件。

答案：（1）由已知有 $\begin{cases} m-1\neq 0 \\ \Delta=m^2>0 \end{cases}$，解得 $m\neq 0$ 且 $m\neq 1$

（2）由 $x=0$ 得 C（0，−1）

又 $\because |AB|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\left|\dfrac{m}{m-1}\right|$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OC|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{m}{m-1}\right|\cdot 1=2$

$\therefore m=\dfrac{4}{3}$ 或 $m=\dfrac{4}{5}$

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-1$ 或 $y=-\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{6}{5}x-1$

【例 2】已知抛物线 $y=x^2-(m^2+8)x+2(m^2+6)$。

（1）求证：不论 m 为任何实数，抛物线与 x 轴有两个不同的交点，且这两个点都在 x 轴的正半轴上；
（2）设抛物线与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于 B、C 两点，当△ABC 的面积为 48 平方单位时，求 m 的值。
（3）在（2）的条件下，以 BC 为直径作⊙M，问⊙M 是否经过抛物线的顶点 P？

分析：二次函数与二次方程有着深刻的内在联系，因此，善于促成二次函数问题与二次方程问题的相互转化，是解相关问题的常用技巧。

答案：（1）$\Delta=(m^2+4)^2>0$，由 $x_1+x_2=m^2+8>0$，$x_1x_2=2(m^2+6)>0$ 可得证。

（2）$|BC|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(m^2+8)^2-8(m^2+6)}=m^2+4$

$|OA|=2(m^2+6)$　　又 $\because S_{\Delta ABC}=48$

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot(m^2+4)\cdot 2(m^2+6)=48$

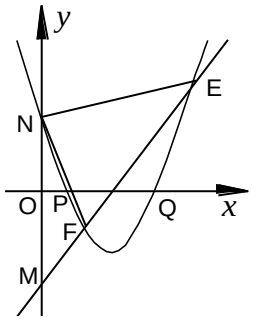
解得 $m^2=2$ 或 $m^2=-12$（舍去）　　$\therefore m=\pm\sqrt{2}$

（3）$y=x^2-10x+16$，顶点（5，-9），$|BC|=6$

$\because |-9|>6$

$\therefore$⊙M 不经过抛物线的顶点 P。

【例 3】如图，抛物线 $y=x^2-(a+b)x+\dfrac{c^2}{4}$，其中 a、b、c 分别是△ABC 的∠A、∠B、∠C 的对边。



（1）求证：该抛物线与 x 轴必有两个交点；

（2）设有直线 $y=ax-bc$ 与抛物线交于点 E、F，与 y 轴交于点 M，抛物线与 y 轴交于点 N，若抛物线的对称轴为 $x=a$，△MNE 与△MNF 的面积之比为 5∶1，求证：△ABC 是等边三角形；

（2）当 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$ 时，设抛物线与 x 轴交于点 P、Q，问是否存在过 P、Q 两点且与 y 轴相切的圆？若存在这样的圆，求出圆心的坐标；若不存在，请说明理由。

分析：本题（1）（2）问与函数图像无关，而第（3）问需要用前两问的结论，解题时千万要认真分析前因后果。同时，如果后一问的解答需要前一问的结论时，尽管前一问没有解答出来，倘能会用前一题的结论来解答后一问题，也是得分的一种策略。

解析：（1）$\Delta=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$

$\because a+b+c>0$，$a+b-c>0$

$\therefore \Delta>0$

（2）由 $\dfrac{a+b}{2}=a$ 得 $a=b$

由 $\begin{cases}y=x^2-(a+b)x+\dfrac{c^2}{4}\\ y=ax-bc\end{cases}$ 得：$x-3ax+\dfrac{c^2}{4}+ac=0$

设 E（x_1，y_1），F（x_2，y_2），那么：$x_1+x_2=3a$，$x_1x_2=\dfrac{c^2}{4}+ac$

由 $S_{\Delta MNE}$ ∶ $S_{\Delta MNF}$ =5∶1 得：$|x_1|=5|x_2|$

$\therefore x_1=5x_2$ 或 $x_1=-5x_2$

由 $x_1\cdot x_2>0$ 知 $x_1=-5x_2$ 应舍去。

由 $\begin{cases}x_1+x_2=3a\\ x_1=5x_2\end{cases}$ 解得 $x_2=\dfrac{a}{2}$

$\therefore 5\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}+ac$，即 $5a^2-4ac-c^2=0$

$\therefore\ a=c$ 或 $5a+c=0$（舍去）

$\therefore\ a=b=c$

∴△ABC 是等边三角形。

（3）$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$

$\therefore a=2$ 或 $a=-2$（舍去）

$\therefore a=b=c=2$，此时抛物线 $y=x^2-4x+1$ 的对称轴是 $x=2$，

与 x 轴的两交点坐标为 P（$2-\sqrt{3}$，0），Q（$2+\sqrt{3}$，0）

设过 P、Q 两点的圆与 y 轴的切点坐标为（0，t），由切割线定理有：$t^2=OP\cdot OQ$

$\therefore t=\pm 1$　　故所求圆的圆心坐标为（2，−1）或（2，1）

巩固特训

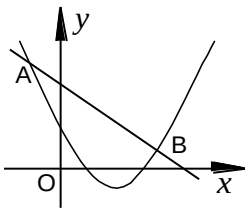
一、选择题：

1、已知抛物线 $y=5x^2+(m-1)x+m$ 与 x 轴两交点在 y 轴同侧，它们的距离的平方等于 $\frac{49}{25}$，则 m 的值为（　　）

A、−2　　B、12　　C、24　　D、−2 或 24

2、已知二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与一次函数 $y_2=kx+m$（$k\neq 0$）的图像交于点 A（−2，4），B（8，2），如图所示，则能使 $y_1>y_2$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

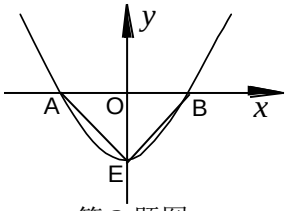
A、$x<-2$　　B、$x>8$　　C、$-2<x<8$　　D、$x<-2$ 或 $x>8$



第 2 题图

3、如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与两坐标轴的交点分别是 A、B、E，且△ABE 是等腰直角三角形，AE＝BE，则下列关系：①$a+c=0$；②$b=0$；③$ac=-1$；④$S_{\Delta ABE}=c^2$ 其中正确的有（　　）

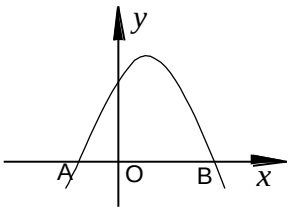
A、4 个　　B、3 个　　C、2 个　　D、1 个



第 3 题图

4、设函数 $y=-x^2+2(m-1)x+m+1$ 的图像如图所示，它与 x 轴交于 A、B 两点，线段 OA 与 OB 的比为 1∶3，则 m 的值为（　　）

A、$\frac{1}{3}$ 或 2　　B、$\frac{1}{3}$　　C、1　　D、2



第 4 题图

二、填空题：

1、已知抛物线 $y=x^2-(k-1)x-3k-2$ 与 x 轴交于两点 A（α，0），B（β，0），且 $\alpha^2+\beta^2=17$，则 k ＝_____。

2、抛物线 $y=x^2-(2m-1)x-2m$ 与 x 轴的两交点坐标分别是 A（x_1，0），B（x_2，0），且 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=1$，则 m 的值为_____。

3、若抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+mx+m-1$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于点 C，且∠ACB＝90^0，则 m ＝_____。

4、已知二次函数 $y=kx^2+(2k-1)x-1$ 与 x 轴交点的横坐标为 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，则对于下列结论：

①当 $x=-2$ 时，$y=1$；②当 $x>x_2$ 时，$y>0$；

③方程 $kx^2+(2k-1)x-1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2；

④ $x_1<-1$，$x_2>-1$；⑤ $x_2-x_1=\frac{\sqrt{1+4k^2}}{k}$，

其中所有正确的结论是_____（只填写顺号）。

三、解答题：

1、已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像过点 E（2，3），对称轴为 $x=1$，它的图像与 x 轴交于两点 A（x_1，0），B（x_2，0），且 $x_1<x_2$，$x_1^2+x_2^2=10$。

（1）求这个二次函数的解析式；

（2）在（1）中抛物线上是否存在点 P，使△POA 的面积等于△EOB 的面积？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

2、已知抛物线 $y=-x^2+(m-4)x+2m+4$ 与 x 轴交于点 A（x_1，0），B（x_2，0）两点，与 y 轴交于点 C，且 $x_1<x_2$，$x_1+2x_2=0$，若点 A 关于 y 轴的对称点是点 D。

（1）求过点 C、B、D 的抛物线解析式；

（2）若 P 是（1）中所求抛物线的顶点，H 是这条抛物线上异于点 C 的另一点，且△HBD 与△CBD 的面积相等，求直线 PH 的解析式；

3、已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}mx-2m$ 交 x 轴于点 A（x_1，0），B（x_2，0）两点，交 y 轴于点 C，且 $x_1<0<x_2$，$(AO+BO)^2=12CO+1$。

（1）求抛物线的解析式；

（2）在 x 轴的下方是否存在着抛物线上的点，使∠APB 为锐角、钝角，若存在，求出 P 点的横坐标的范围；若不存在，请说明理由。

上期答案

巩固特训答案：

一、选择题：B　　D　　C　　A

二、填空题

1、$y=-x^2+2x+3$ 或 $y=x^2-2x-3$；

2、$y=-\frac{5}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{25}{9}$；

3、9.1 米；

4、$y=-(x-1)^2+\sqrt{3}$ 或 $y=-(x-1)^2-\sqrt{3}$ 或 $y=(x-1)^2+\sqrt{3}$

或 $y=(x-1)^2-\sqrt{3}$

三、解答题：

1、（1）$y=-x^2-2x+3$；（2）M（0，3）或（−2，3）

2、（1）$y=-\frac{8}{3}x^2-4x$；（2）Q（$-\frac{8}{3}$，$\frac{9}{8}$），（$\frac{3}{8}$，$-\frac{15}{8}$）

3、（1）$b=-a-1$，$-c=1-2a$；（2）（1，1），（−2，−2）；

（3）点（1，1）在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 时，直线 AM // x 轴；点（−2，−2）在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 时，直线 AM 与 x 轴相交。

联系我们

深圳智康初中家长交流群（群号：90482695）

深圳智康官网：sz.jiajiaoban.com

微博：@深圳智康 1 对 1

微信：szzhikangwx，vbangedu(V 帮)

网址： http://sz.jiajiaoban.com/

