

# 第十九届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛试题（初二组）

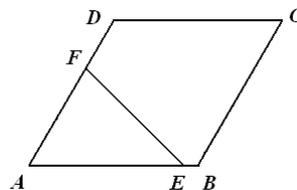
（时间：2014 年 4 月 12 日 10:00~11:30）

## 一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 计算：
$$\frac{\sqrt{2^3} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6} + \sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{3\sqrt{2^3} - 2\sqrt{3^3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 已知正整数  $a, b, c$  满足三个等式： $\frac{a}{3} = \frac{b}{c}$ ,  $\left(\frac{a+b}{3+c}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ,  $a^2 + b^2 = 68$ , 那么  $c^2$  等于\_\_\_\_\_.

3. 如图,  $E, F$  分别是菱形  $ABCD$  的边  $AB, AD$  上的点,  $\angle DCB = 60^\circ$ ,  $\angle DFE = 105^\circ$ ,  $DF = 1$ ,  $BE = 2 - \sqrt{3}$ , 那么这个菱形的边长等于\_\_\_\_\_.

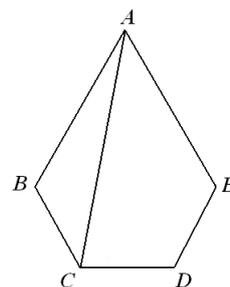


4. 将一个四位数的四个数字之和的两倍与这个四位数相加得 2379, 则满足条件的四位数有\_\_\_\_\_个.

5. 已知  $x = \sqrt{50 + \sqrt{14a}} + \sqrt{50 - \sqrt{14a}}$ , 其中  $a$  是正整数, 那么所有使得  $x$  为整数的  $a$  的取值之和为\_\_\_\_\_.

6. 已知  $a, b, c$  为互不相等的非零实数, 且存在实数  $x, y$  满足 
$$\begin{cases} a^3 + ax + y = 0 \\ b^3 + bx + y = 0 \\ c^3 + cx + y = 0 \end{cases}$$
 那么  $a+b+c$  的值是\_\_\_\_\_.

7. 如右图所示, 五边形  $ABCDE$  中,  $AB = AE$ ,  $BC = CD$ ,  $AC = 2$  厘米,  $\angle BAE = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle BCD = \angle D = \angle E$ , 则五边形  $ABCDE$  的面积是\_\_\_\_\_平方厘米.



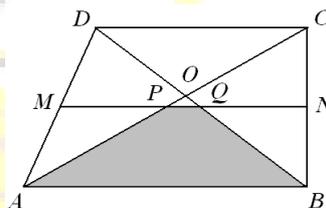
8. 方程  $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$  的系数  $A, B, C$  为整数,  $|A| < 10, |B| < 10, |C| < 10$ , 且 1 是方程的根, 那么这种方程总共有\_\_\_\_\_个.

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 关于  $x$  的方程  $\left(x + 1 - \frac{a}{2}\right)(|4x - a| - 2) = 0$  的 3 个解恰好是某个直角三角形三条边的边长, 那么这个直角三角形面积的最大值是多少?

10. 若干个选手参加象棋比赛, 每两个选手下一盘. 每盘棋的记分方法为: 胜者得 1 分, 和棋各得 0.5 分, 负者得 0 分. 如果有两名选手共积 11 分, 其他选手的平均积分为整数, 那么一共下了多少盘棋?

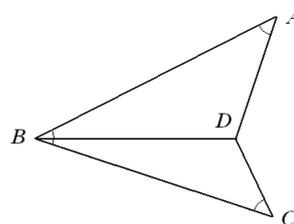
11. 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 8$ ,  $CD = 6$ .  $M, N$  分别为  $AD, BC$  的中点,  $MN$  与梯形  $ABCD$  的对角线  $AC, BD$  分别相交于  $P, Q$ . 如图所示的四边形  $ABQP$  的面积为 18, 求梯形  $ABCD$  的面积.



12. 已知十个互不相同的正数满足:
- 1) 它们的和为 385;
  - 2) 它们中任意两个数的和或者差的绝对值是这十个数中的某个数.
- 请写出这十个数.

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 右图中,  $\angle ABC = \angle BCD = \angle DAB = 45^\circ$ ,  $BD = 2$  厘米, 求四边形  $ABCD$  的面积.



14. 有  $n$  个人在网上购物,  $n > 2$ . 已知, 任意三个人中有两人买有同一种类的商品, 没有三个人买有同一种类的商品. 若他们中的甲和乙两人各买了四种商品, 但没有买同一种类的商品, 则  $n$  的最大值是多少? 当  $n$  最大时, 这  $n$  个人一共最少买了多少种商品?