北京市西城区 2013-2014 学年度第一学期期末

九年级数学试卷参考答案及评分标准　2014.1

一、选择题（本题共 32 分，每小题 4 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	B	A	D	C	A

二、填空题（本题共 16 分，每小题 4 分）

题号	9	10	11	12	
答案	$\frac{5}{2}$	x^2-2x-2	60，$\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$(6\pm\sqrt{25-r^2},0)$

阅卷说明：第 11 题、第 12 题每空 2 分.

三、解答题（本题共 30 分，每小题 5 分）

13. 解：$2\sin 60^\circ+3\tan 30^\circ-2\tan 60^\circ\cdot\cos 45^\circ$.

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……4 分

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$. ……5 分

14. 解：（1）∵ 二次函数 $y=x^2+bx-3$ 的图象经过点 $A(2,5)$.

∴ $4+2b-3=5$. ……1 分

∴ $b=2$.

∴ 二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-3$. ……2 分

（2）令 $y=0$，则有 $x^2+2x-3=0$.

解得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

∴ 二次函数的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$ 和 $(1,0)$. ……4 分

（3）$y=x^2+2x-3$

$=(x^2+2x+1)-4$

$=(x+1)^2-4$. ……5 分

15. 解：∵ 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle A=90^\circ$，

∴ $\angle D=90^\circ$.

∴ $\angle DCP+\angle DPC=90^\circ$.

∵ $PC\perp PB$，

∴ $\angle BPC=90^\circ$，$\angle DPC+\angle APB=90^\circ$.

∴ $\angle DCP=\angle APB$. ……2 分

∴ $\tan\angle DCP=\tan\angle APB$.

在 $Rt\triangle PCD$ 中，$CD=2$，$PD=4$，

∴ $\tan\angle DCP=\frac{PD}{CD}=\frac{1}{2}$.



在 Rt△PBA 中，AB=6，

$\therefore \sin\angle APB=\frac{AB}{PA}$

$\therefore \frac{1}{2}=\frac{6}{PA}$ ……4 分

$\therefore PA=12$ ……5 分

$\therefore PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=6\sqrt{3}$ ……1 分

16. 解：设从 2011 年底至 2013 年底该市城区绿地总面积的年平均增长率是 x. ……2 分

依题意，得 $75(1+x)^2=108$. ……3 分

整理，得 $(1+x)^2=\frac{36}{25}$.

$1+x=\pm\frac{6}{5}$. ……4 分

解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（舍去）. ……5 分

答：从 2011 年底至 2013 年底该市城区绿地总面积的年平均增长率是 20%. ……1 分

17. 解：设河宽 AB 为 x 米.

$\because AB\perp BC$，

$\therefore \angle ABC=90°$

$\because$ 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=45°$，

$\therefore AB=BC=x$. ……2 分

$\because$ 在 Rt△ABD 中，$\angle ADB=30°$，

$\therefore BD=\sqrt{3}AB=\sqrt{3}x$. ……3 分

$\therefore CD=BD-BC=\sqrt{3}x-x$. ……4 分

$\therefore \sqrt{3}x-x=30$.

解得 $x=15\sqrt{3}+15\approx 41$. ……5 分

答：河宽 AB 约为 41 米. ……1 分

18. 解：（1）$\because AB$ 是⊙O 的弦，$OC\perp AB$ 于 C，$AB=12$，

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=6$. ……1 分

$\because$ 在 Rt△AOC 中，$\angle ACO=90°$，$\cos A=\frac{3}{5}$，

$\therefore OA=10$. ……2 分

$\therefore OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=8$. ……3 分

（2）2 或 14. ……5 分

四、解答题（本题共 20 分，每小题 5 分）

19. 解：（1）二次函数 $y_1=x^2-4x+3$ 图象的顶点 $(2,-1)$ 关于 y 轴的对称点坐标为 $(-2,-1)$，

……1 分

$\therefore$ 所求的二次函数的解析式为 $y_2=(x+2)^2-1$. ……2 分

即 $y_2=x^2+4x+3$.

（2）$-1 \leqslant y_2 \leqslant 3$. ……4分

（3）$-2 < x < 0$. ……5分

20.（1）证明：∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle DAB = \angle ABC = \angle C = \angle D = 90°$.

∴ $\angle ABF = \angle D = 90°$.

∵ $AF \perp AE$,

∴ $\angle EAF = \angle DAE + \angle EAB = \angle DAB = 90°$.

∴ $\angle BAE + \angle BAF = 90°$.

∴ $\angle DAE = \angle BAF$.

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABF$. ……2分

（2）解：①如图，取 FC 的中点 H，连接 MH.

∵ M 为 EF 的中点，

∴ $MH \parallel DC$，$MH = \frac{1}{2}EC$.

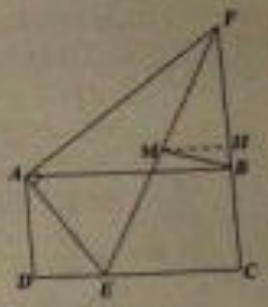
∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle C = 90°$,

∴ $MH \perp FC$，即 MH 是点 M 到 FC 的距离.

∵ $DE = x$，$DC = AB = 4$.

∴ $EC = 4 - x$，

∴ $MH = \frac{1}{2}EC = 2 - \frac{1}{2}x$.



即点 M 到 FC 的距离为 $MH = 2 - \frac{1}{2}x$. ……3分

②∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABF$,

∴ $\frac{DE}{AD} = \frac{BF}{AB}$,

∴ $\frac{x}{2} = \frac{BF}{4}$.

∴ $BF = 2x$，$FC = 2 + 2x$，$FH = CH = 1 + x$.

∴ $HB = BF - HF = |x - 1|$

∵ $MH = 2 - \frac{1}{2}x$，

∴ 在 $Rt\triangle MHB$ 中，$MB^2 = BH^2 + MH^2 = (2 - \frac{1}{2}x)^2 + (x - 1)^2$

$= \frac{5}{4}x^2 - 4x + 5$.

∴ $y = \frac{5}{4}x^2 - 4x + 5$（$0 < x < 4$）. ……4分

当 $x = \frac{8}{5}$ 时，BM 长的最小值是 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. ……5分

21.（1）证明：如图，连接 OC.

∵ AD 是过点 A 的切线，AB 是⊙O 的直径，

∴ $AD \perp AB$.

∴ $\angle DAB = 90°$.

∵ $OD \parallel BC$.

∴ $\angle DOC = \angle OCB$, $\angle AOD = \angle ABC$.

∵ $OC = OB$.

∴ $\angle OCB = \angle ABC$.

∴ $\angle DOC = \angle AOD$.

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle AOD$ 中，

$$\begin{cases} OC = OA, \\ \angle DOC = \angle AOD, \\ OD = OD, \end{cases}$$

∴ $\triangle COD \cong \triangle AOD$. ……1 分

∴ $\angle OCD = \angle DAB = 90°$.

∴ $OC \perp DE$ 于点 C.

∵ OC 是 $\odot O$ 的半径，

∴ DE 是 $\odot O$ 的切线. ……2 分

（2）解：由 $\frac{CE}{DE} = \frac{2}{3}$，可设 $CE = 2k(k > 0)$，则 $DE = 3k$. ……3 分

∴ $AD = DC = k$.

∴ 在 $Rt\triangle DAE$ 中，$AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = 2\sqrt{2}k$.

∴ $\tan E = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

∵ 在 $Rt\triangle OCE$ 中，$\tan E = \frac{OC}{CE} = \frac{OC}{2k}$.

∴ $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{OC}{2k}$,

∴ $OC = OA = \frac{k}{\sqrt{2}}$.

∴ 在 $Rt\triangle AOD$ 中，$OD = \sqrt{AO^2 + AD^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k$. ……4 分

∴ $\cos\angle ABC = \cos\angle AOD = \frac{OA}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ……5 分

22. 解：（1）①③；……2 分

（2）2π；……3 分

（3）$-x-\sqrt{2}$；……4 分

（4）答案不唯一，所画图形是非封闭的，长度 l 满足 $\pi+2 \leqslant l < 2\pi$.

例如：在图 1 中 $l = \pi + 2$，

在图 2 中 $l = 6$. ……5 分

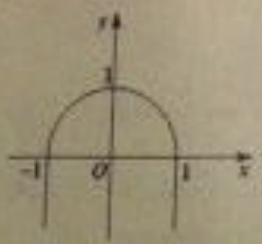


图 1

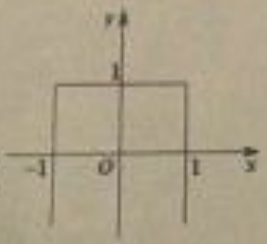


图 2

阅卷说明：在（1）中，只填写一个结果得1分，有错误结果不得分；在（4）中画图正确且图形长度都正确得1分，否则得0分.

五、解答题（本题共22分，第23题7分，第24题7分，第25题8分）

23. 解：（1）①∵ 二次函数 $y=x^2-mx+\frac{3}{4}m+1$ 的图象与 x 轴只有一个公共点 A，

∴ $\Delta=m^2-4\times1\times(\frac{3}{4}m+1)=0$. ……1分

整理，得 $m^2-3m-4=0$.

解得，$m_1=4$，$m_2=-1$.

又点 A 在 x 轴的正半轴上，

∴ $m>0$.

∴ $m=4$. ……2分

②由①得点 A 的坐标为(2，0).

∵ 四边形 $AOBC$ 是正方形，点 B 在 y 轴的负半轴上，

∴ 点 B 的坐标为(0，−2)，点 C 的坐标为(2，−2). ……3分

设平移后的图象对应的函数解析式为 $y=x^2+bx+c$（b，c 为常数）.

∴ $\begin{cases}c=-2,\\4+2b+c=-2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=-2.\end{cases}$

∴平移后的图象对应的函数解析式为 $y=x^2-2x-2$. ……4分

（2）函数 $y=x^2-mx+\frac{3}{4}m+1$ 的图象是顶点为 $(\frac{m}{2},-\frac{m^2}{4}+\frac{3}{4}m+1)$，且开口向上的抛物线. 分三种情况：

（i）当 $\frac{m}{2}<0$，即 $m<0$ 时，函数在 $0\leqslant x\leqslant2$ 内 y 随 x 的增大而增大，此时函数的最小值为 $\frac{3}{4}m+1$；

（ii）当 $0\leqslant\frac{m}{2}\leqslant2$，即 $0\leqslant m\leqslant4$ 时，函数的最小值为 $-\frac{m^2}{4}+\frac{3}{4}m+1$；

（iii）当 $\frac{m}{2}>2$，即 $m>4$ 时，函数在 $0\leqslant x\leqslant2$ 内 y 随 x 的增大而减小，此时函数的最小值为 $-\frac{5}{4}m+5$.

综上，当 $m<0$ 时，函数 $y=x^2-mx+\frac{3}{4}m+1$ 的最小值为 $\frac{3}{4}m+1$；

当 $0\leq m\leq4$ 时，函数 $y=x^2-mx+\frac{3}{4}m+1$ 的最小值为 $-\frac{m^2}{4}+\frac{3}{4}m+1$；

当 $m>4$ 时，函数 $y=x^2-mx+\frac{3}{4}m+1$ 的最小值为 $-\frac{5}{4}m+5$. ……7分

24. （1）$\frac{AD}{BE}=\sqrt{3}$，$AD\perp BE$. ……2分

（2）证明：连接 DM，AM.

在等边三角形 ABC 中，M 为 BC 的中点，

$\therefore AM\perp BC$，$\angle BAM=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$，$\frac{AM}{BM}=\sqrt{3}$.

$\therefore \angle BME+\angle EMA=90^\circ$.

同理，$\frac{DM}{EM}=\sqrt{3}$，$\angle AMD+\angle EMA=90^\circ$.

$\therefore \frac{AM}{BM}=\frac{DM}{EM}$，$\angle AMD=\angle BME$. ……3分

$\therefore \triangle ADM\backsim\triangle BEM$.

$\therefore \frac{AD}{BE}=\frac{DM}{EM}=\sqrt{3}$. ……4分

延长 BE 交 AM 于点 G，交 AD 于点 K.

$\therefore \angle MAD=\angle MBE$，$\angle BGM=\angle AGK$.

$\therefore \angle GKA=\angle AMB=90^\circ$.

$\therefore AD\perp BE$. ……5分

（3）解：（i）当 $\triangle DEF$ 绕点 M 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ)$ 角时，

$\because \triangle ADM\backsim\triangle BEM$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle BEM}}=(\frac{AD}{BE})^2=3$.

$\therefore S_{\triangle BEM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADM}$

$\therefore S=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ADM}-S_{\triangle AEM}-S_{\triangle DEM}$

$=S_{\triangle ABM}+\frac{2}{3}S_{\triangle ADM}-S_{\triangle DEM}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}(x-3)-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

$\therefore S=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ $(3\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3})$. ……6分

（ii）当 $\triangle DEF$ 绕点 M 逆时针旋转 $\alpha(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ)$ 角时，可证 $\triangle ADM\backsim\triangle BEM$.

$\therefore \frac{S_{\triangle BEM}}{S_{\triangle ADM}}=(\frac{BM}{AM})^2=\frac{1}{3}$.

$\therefore S_{\triangle BEM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADM}$.

$\therefore S=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BEM}-S_{\triangle ADM}-S_{\triangle DEM}$

$=S_{\triangle ABM}-\frac{2}{3}S_{\triangle ADM}-S_{\triangle DEM}$

$=\frac{9}{2}\sqrt{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}(3-x)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

$\therefore S=\sqrt{3}x+\sqrt{3}\ (3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3)$.

综上，$S=\sqrt{3}x+\sqrt{3}\ (3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3})$ ……7分

解：（1）①该二次函数图象的对称轴为直线 $x=-1$； ……1分

②∵ 当 $x=0$ 时，$y=-4$，

∴ 点 C 的坐标为 $(0,-4)$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot|y_C|=12$，

∴ $AB=6$.

又∵点 A，B 关于直线 $x=-1$ 对称，

∴ A 点和 B 点的坐标分别为 $(-4,0)$，$(2,0)$.

∴ $4a+4a-4=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$

∴ 所求二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2+x-4$. ……2分

（2）如图，作 $DF\perp x$ 轴于点 F. 分两种情况：

（i）当点 P 在直线 AD 的下方时，如图所示.

由（1）得点 $A(-4,0)$，点 $D(-2,1)$，

∴ $DF=1$，$AF=2$.

在 $Rt\triangle ADF$ 中，$\angle AFD=90^\circ$，得 $\tan\angle ADF=\frac{AF}{DF}=2$.

延长 DF 与抛物线交于点 P_1，则 P_1 点为所求.

∴ 点 P_1 的坐标为 $(-2,-4)$. ……3分

（ii）当点 P 在直线 AD 的上方时，延长 P_1A 至点 G 使得 $AG=AP_1$，连接 DG，

作 $GH\perp x$ 轴于点 H，如图所示.

可证 $\triangle GHA\cong\triangle P_1FA$.

∴ $HA=AF$，$GH=P_1F$，$GA=P_1A$.

又∵ $A(-4,0)$，$P_1(-2,-4)$，

∴ 点 G 的坐标是 $(-6,4)$.

在 $\triangle ADP_1$ 中，

$DA=\sqrt{5}$，$DP_1=5$，

$AP_1=2\sqrt{5}$，

∴ $DA^2+AP_1^2=DP_1^2$.

∴ $\angle DAP_1=90^\circ$.

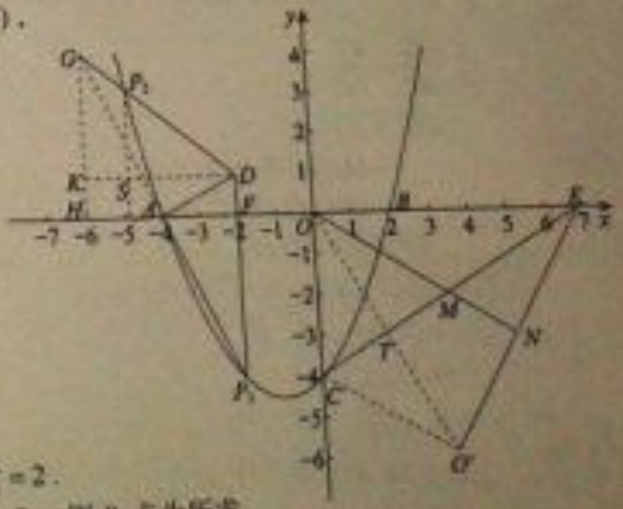
∴ $DA\perp GP_1$.

∴ $DG=DP_1$.

∴ $\angle ADG=\angle ADP_1$.

∴ $\tan\angle ADG=\tan\angle ADP_1=2$.

设 DG 与抛物线的交点为 P_2，则 P_2 点为所求.



作 $DK \perp GH$ 于点 K，作 $P_2S \parallel GK$ 交 DK 于点 S.

设 P_2 点的坐标为 $(x, \frac{1}{2}x^2 + x - 4)$，

则 $P_2S = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 - 1 = \frac{1}{2}x^2 + x - 5$，$DS = -2 - x$.

由 $\frac{P_2S}{GK} = \frac{DS}{DK}$，$GK = 3$，$DK = 4$，得 $\frac{\frac{1}{2}x^2 + x - 5}{3} = \frac{-2-x}{4}$.

整理，得 $2x^2 + 7x - 14 = 0$.

解得 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{161}}{4}$.

∵ P_2 点在第二象限，

∴ P_2 点的横坐标为 $x = \frac{-7-\sqrt{161}}{4}$（舍正）.

综上，P 点的横坐标为 -2 或 $\frac{-7-\sqrt{161}}{4}$. ……5 分

(3) 如图，连接 OO'，交 CE 于 T. 连接 $O'C$.

∵ 点 O 与点 O' 关于 EC 所在直线对称，

∴ $OO' \perp CE$，$\angle OCE = \angle O'CE$，$\angle CO'E = \angle COE = 90°$.

∴ $O'C \perp O'E$.

∵ $ON \perp O'E$，

∴ $O'C \parallel ON$.

∴ $\angle OMC = \angle O'CE = \angle OCE$.

∴ $OC = OM$. ……6 分

∴ $CT = MT$.

∵ 在 $Rt\triangle ETO$ 中，$\angle ETO = 90°$，$\cos\angle OEC = \frac{ET}{OE}$，

在 $Rt\triangle COE$ 中，$\angle COE = 90°$，$\cos\angle OEC = \frac{OE}{EC}$，

∴ $\frac{OE}{EC} = \frac{ET}{OE}$.

∴ $OE^2 = ET \cdot EC$

$= (EM + TM) \cdot EC$

$= EM \cdot EC + TM \cdot EC$

$= 32 + TM \cdot EC$.

同理 $OC^2 = CT \cdot EC = TM \cdot EC = 16$.

∴ $OE^2 = 32 + 16 = 48$.

∵ $OE > 0$.

∴ $OE = 4\sqrt{3}$.

∵ 点 E 在 x 轴的正半轴上，

∴ E 点的坐标为 $(4\sqrt{3}, 0)$. ……8 分