2013 秋季新高三入学测试

数学(理)参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

题号	第 1 题	第 2 题	第 3 题	第 4 题	第 5 题	第 6 题	第 7 题	第 8 题
答案	A	C	B	A	B	D	A	C

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在题中横线上．

9. $\frac{56}{65}$，$\frac{14}{5}$．（第一空 3 分，第二空 2 分）

10. 90．

11. $\sqrt{6}$．

12. 44．

13. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$．

14. $\sqrt{2}$．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. （本小题共 13 分）

（Ⅰ）解：

$f(x)=\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x$ ……2 分

$=\sin 2x+\cos 2x$ ……3 分

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ ……5 分

所以，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．……7 分

（Ⅱ）解：因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ……9 分

所以，当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2}$；……11 分

当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 有最小值 -1．……13 分

16. （本小题共 13 分）

（I）解：$21\times\frac{6}{21+14+7}=3$，$14\times\frac{6}{21+14+7}=2$，$7\times\frac{6}{21+14+7}=1$ ……3 分

所以从小学、中学、大学中分别抽取的学校数目为 3，2，1．……5 分

（II）解：X 的可能值为 0，1，2 ……6 分

$P(X=0)=\frac{C_3^0\cdot C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$ ……7 分

$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$ ……8 分

$P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_3^0}{C_6^2}=\frac{1}{5}$ ……9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

……11 分

数学期望为 $EX=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$．……13 分

17. （本小题共 14 分）

（I）证：连接 AC，因为 $AB\perp BC$，$AB=BC=1$

所以 $AC=\sqrt{2}$，

又因为 $AB\parallel CD$，所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形，

又 $AB=BC=1, CD=2$，易求得 $AD=\sqrt{2}$；

所以在 ΔDAC 中，有 $AD^2+AC^2=CD^2$

所以 $AC\perp AD$ ……2 分

又因为平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA\perp AB$，平面 $PAB\cap$ 底面 $ABCD=AB$

所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$

又 $AC\subset$ 底面 $ABCD$

所以 $AC\perp PA$

又 $PA\cap AD=A$

所以 $AC\perp$ 平面 PAD ……4 分

又 $AC\subset$ 平面 PAC

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PAC．……5 分

（II）过点 B 作 z 轴// PA，如图，以 B 为原点，建立空间直角坐标系 $B-xyz$．……6 分

则 $D(2,1,0)$， $P(1,0,1)$， $B(0,0,0)$， $C(0,1,0)$ ……7 分

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PBD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{BP}=(1,0,1)$， $\overrightarrow{BD}=(2,1,0)$， $\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$

所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BP}=x_1+z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC}=y_1=0\end{cases}，\quad\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BP}=x_2+z_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BD}=2x_2+y_2=0\end{cases}$$

令 $x_1=1$， $x_2=1$

得 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,-1)$， $\overrightarrow{n_2}=(1,-2,-1)$ ……9 分

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由图知，二面角 $D-PB-C$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ……10 分

（III）证：设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BD}=(2\lambda,\lambda,0)$

所以 $F(2\lambda,\lambda,0)$ ……11 分

因为 E 为 PC 中点

所以 $E(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

所以 $\overrightarrow{EF}=(2\lambda-\dfrac{1}{2},\lambda-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$ ……12 分

又 $A(1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{BA}=(1,0,0)$

因为 $EF\perp AB$

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=2\lambda-\dfrac{1}{2}=0$ ……13 分

所以 $\lambda=\dfrac{1}{4}$

所以在线段 BD 上存在点 F，使得 $EF\perp AB$，且 $\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{1}{4}$． ……14 分

18. （本小题满分 13 分）

（I）因为 $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$， $x>0$ ……3 分

所以 $y'|_{x=1}=1$ ……4 分

所以 l 的方程为 $y=x-1$，即 $x-y-1=0$． ……5 分

（II）依题意，只需证，除切点 $(1,0)$ 之外， $x\ln x>x-1$． ……6 分

令 $g(x)=x\ln x-x+1$ ……7 分

$g'(x)=\ln x,x>0$ ……8 分

所以

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

……10 分

所以，当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$， $g(x)>g(1)=0$，即 $x\ln x>x-1$ ……12 分

即证得，除切点 $(1,0)$ 之外，曲线 C 在直线 l 的上方． ……13 分

19. （本小题满分 14 分）

（I）依题意，可设椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．

由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2c,b^2=a^2-c^2=3c^2$ ……1 分

∵椭圆经过点 $(1,\dfrac{3}{2})$，则 $\dfrac{1}{4c^2}+\dfrac{9}{12c^2}=1$，解得 $c^2=1$ ……3 分

∴椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……4 分

（II）依题意，直线 l 的斜率一定存在，设 l 方程为 $y=kx-2$，

设 A,B 两点坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=kx-2\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 整理得 $(4k^2+3)x^2-16kx+4=0$ ……5 分

∵ 直线与椭圆有两个交点，

∴ $\Delta=(-16k)^2-16(4k^2+3)>0$，解得 $k^2>\dfrac{1}{4}$ ①……6 分

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{16k}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\dfrac{4}{4k^2+3}\end{cases}$$ ……7 分

∵原点 O 在以 AB 为直径的圆外，

∴ $\angle AOB$ 为锐角

∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$ ……9 分

则 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2-2k(x_1+x_2)+4$

$=(k^2+1)\dfrac{4}{4k^2+3}-2k\dfrac{16k}{4k^2+3}+4>0$ ……11 分

解得 $k^2<\dfrac{4}{3}$ ②……12 分

综合①②可知： $k\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ……14 分

20. （本小题满分 13 分）

（I）解：假设数列$\{a_n\}$是“$p-$摆动数列”，

即存在常数p，总有$2n-1<p<2n+1$对任意n成立，

不妨取$n=1$时，则$1<p<3$，取$n=2$时，则$3<p<5$，显然常数p不存在，

所以数列$\{a_n\}$不是“$p-$摆动数列”；……2 分

由$b_n=q^n$，于是$b_nb_{n+1}=q^{2n+1}<0$对任意n成立，其中$p=0$.

所以数列$\{b_n\}$是“$p-$摆动数列”．……4 分

（II）由数列$\{c_n\}$为“$p-$摆动数列”，$c_1=1\Rightarrow c_2=\frac{1}{2}c_1=1$，

即存在常数$\frac{1}{2}<p<1$，使对任意正整数n，总有$(c_{n+1}-p)(c_n-p)<0$成立；

即有$(c_{n+2}-p)(c_{n+1}-p)<0$成立．则$(c_{n+2}-p)(c_n-p)>0$，……5 分

所以$c_1>p\Rightarrow c_3>p\Rightarrow\cdots\Rightarrow c_{2n-1}>p$.

同理$c_2<p\Rightarrow c_4<p\Rightarrow\cdots\Rightarrow c_{2n}<p$．……7 分

所以$c_{2n}<p<c_{2n-1}\Rightarrow\frac{1}{c_{2n-1}+1}<c_{2n-1}$，解得$c_{2n-1}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以$p\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；

同理$\frac{1}{c_{2n}}-1>c_{2n}$，解得$c_{2n}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以$p\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

综上$p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．……9 分

（III）证明：由$d_n=(-1)^n\cdot(2n-1)\Rightarrow S_n=(-1)^n\cdot n$，……10 分

显然存在$p=0$，使对任意正整数n，总有$S_nS_{n+1}=(-1)^{2n+1}\cdot n(n+1)<0$成立，

所以数列$\{S_n\}$是“$p-$摆动数列”；……11 分

当n为奇数时$S_n=-n$递减，所以$S_n\le S_1=-1$，只要$p>-1$即可

当n为偶数时$S_n=n$递增，$S_n\ge S_2=2$，只要$p<2$即可

综上，$-1<p<2$，p的取值范围是$(-1,2)$．……13 分

（取$(-1,2)$中的任意一个值，并给予证明均给分）

如取$p=\frac{1}{2}$时，$(S_n-\frac{1}{2})(S_{n+1}-\frac{1}{2})=[(-1)^n n-\frac{1}{2}][(-1)^{n+1}(n+1)-\frac{1}{2}]$

$=(-1)^{2n+1}\cdot n(n+1)+\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{4}=-n(n+1)+\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{4}$

因为$-\frac{1}{4}\le\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$，$-n(n+1)\le-2$，所以存在$p=\frac{1}{2}$，使$(S_n-\frac{1}{2})(S_{n+1}-\frac{1}{2})<0$成立.

所以数列$\{S_n\}$是“$p-$摆动数列”.