

2012 六年级希望杯 100 题答案

答·提示

$$\begin{aligned}
 1. \text{ 原式} &= (1+2+\cdots+51) + \\
 &\quad 2 \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{59} - \frac{1}{60} \right) \\
 &= \frac{(1+51) \times 51}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{60} \right) = 1326 \frac{17}{90}.
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ 原式} = \frac{(1+3 \times 3 \times 3 \times 3) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4}{(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5 \frac{1}{8}.$$

3. 原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \cdots + \frac{5}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \cdots + \frac{29}{30} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + 1 + \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 2 + \left(2 + \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(14 + \frac{1}{2} \right) \\
 &= (1+2+3+\cdots+14) \times 2 + \frac{1}{2} \times 15 = 210 + \frac{15}{2} = 217 \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

4. 原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{58}{58} + \frac{1949}{1949} + \frac{2007}{2007} + \frac{1949}{58} - \frac{1949}{2007} + \frac{58}{1949} - \frac{58}{2007} - \frac{2007}{1949} - \frac{2007}{58} \\
 &= 58 \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{1949} - \frac{1}{2007} \right) + 1949 \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{1949} - \frac{1}{2007} \right) \\
 &\quad - 2007 \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{1949} - \frac{1}{2007} \right) \\
 &= (58 + 1949 - 2007) \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{1949} - \frac{1}{2007} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

5. ③.

6. 这串数字是: 2134718976392134718976392134...

由上可知, 这串数字每 12 个数字循环一次,

$$2012 \div 12 = 167 \cdots \cdots 8,$$

因此, 这串数字中第 2012 个数字等于第 8 个数字 9.

7. 是 17 的倍数的两位数最大是 $17 \times 5 = 85$, 故所求三位数的前两位数字是 85. 因为 $8+5=13$, 故所求三位数的个位数字是 2、5、8 时, 该数能被 3 整除, 因此, 所求的三位数最大是 858.

8. 由 $a_n = 1 + 11x = 12 + 15y$, x, y 都是自然数,

得 $11x = (11 + 11y) + 4y$, 即 $11 \mid y$, y 最小可取 0.

因此 $a_1 = 12 + 15 \times 0 = 12$.

一般地, $a_m = 12 + (m-1) \times 11 \times 15$, $m = 1, 2, 3, \dots$

由 $2011 < 12 + (m-1) \times 11 \times 15$, 解得

$$12 \cdot 12 < m-1, \text{ 即 } m = 14.$$

9. 设 2006 年人口总数为 a , 则 2010 年人口总数为:

$$a(1+1\%)(1+1\%)(1-1\%)(1-1\%) = a[1-(1\%)^2]^2$$

$$= a(1-0.0002+0.00000001) \approx a(1-0.02\%),$$

所以减少 0.02%.

$$10. 3 \div (1 - 7 \div 8) = 24.$$

11. 要使乘积最大, 首先应当将较大的数填到高位上, 可得出以下算式: $864 \times 753; 854 \times 763; 853 \times 764; 863 \times 754$.

这四个算式中, 两个三位数的和都相等, 因此比较它们的差, 发现 853 与 764 的差最小, 即 853 与 764 的乘积最大.

$$12. 2 \times (31+28+31+30+31+30) - 6 \times 9 + 8 = 316.$$

$$13. \frac{a-b}{1+a-b-ab} = \frac{a-b}{(1+a)(1-b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{101}}{(1+\frac{1}{100})(1-\frac{1}{101})} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{101}}{\frac{101}{100} \times \frac{100}{101}} = \frac{1}{10100}.$$

14. 由 $3 \times 7B = 105$, 得 $B = 5$.

若 $3 \times 7B$ 是 105 的倍数且大于 105, 则 $B > 9$, 不符合题意.

已知等式左边通分, 得 $\frac{35A+63+15C}{105}$, 等式右边 $= \frac{193}{105}$,

即 $35A + 63 + 15C = 193$,

亦即 $35A + 15C = 130$, $7A + 3C = 26$,

又 A、C 都是大于零的自然数,得 A = 2, C = 4.

15. 不论选择哪个两位数,所得十位数除以这个两位数,得到的商都是 101010101,101010101 除以 9,余数是 5.

16. 由图 38,知最多可将所给图案分成 6 部分.

17. 正三角形的边长被 2、3、4 等分时,得到相同的小正三角形分别是 4, 9, 16 个,即 $2^2, 3^2, 4^2$ 个,所以当正三角形的边长被 10 等分时,可得到相同的小正三角形 10^2 ,即 100 个.

18. 由题意,知六年级 1 班的人数除以 2、3、4 都余 1,也就是六年级 1 班的人数除以 2、3、4 的公倍数 12 余 1,在 30 与 40 之间,只有 37 满足要求.

$$19. \frac{1}{A} = \frac{a+b}{a \times b} = \frac{a}{a \times b} + \frac{b}{a \times b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a},$$

所以 $A = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, 表示该工程由甲、乙两人共同完成所需天数.

类似地, $\frac{1}{B} = \frac{a \times b}{a \times b \times c} + \frac{b \times c}{a \times b \times c} + \frac{c \times a}{a \times b \times c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$,

所以 $B = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$, 表示该工程由甲、乙、丙三人共同完成所需

天数,显然 $A > B$.

20. 若两支荧光管同时坏在一个数字上,则车次可能是 834, 284, 239;由于显示“2”和“4”的显示器不可能只坏一支荧光管,所以这两支荧光管不可能坏在两个不同的数字上.故该公交线路号有 3 种可能.

21. 设原来甲、乙两人各有 $3a$ 和 $2a$ 元钱,

由题设,得 $(3a - 8) : (2a + 8) = 2 : 3$, 所以 $a = 8$,

故甲、乙两人共有 $3 \times 8 + 2 \times 8 = 40$ (元)钱.

22. 设该校荣获希望杯一等奖的学生有 x 人,则

$$120 + 0.5 \times 120x = 0.6 \times 120(x+1), \text{解得 } x = 4.$$



图 38

23. 因为 $AC \parallel DE$, 所以 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle CDE}$, $S_{\triangle APE} = S_{\triangle CPD}$,

又 $\frac{PC}{CE} = \frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle CDE}}$, $\frac{PE}{CE} = \frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle EAC}}$, 所以 $\frac{PC}{PE} = \frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle EAC}}$.

因为 $\triangle EAC$ 的边 AC 上的高和 $\triangle CDE$ 的边 DE 上的高相等,

所以 $\frac{PC}{PE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{1}{2}$, 即 $PC = \frac{1}{3}CE$,

同理可得 $\frac{CQ}{AQ} = 2$, 即 $CQ = \frac{2}{3}AC$.

所以 $\frac{CQ}{CP} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{3}CE} = \frac{2AC}{CE} = 1$.

24. 当 M 运动到 A 或者 D 点时, $MNPQ$ 的面积最大, 等于 $ABCD$ 的面积 1.

当 M 运动到 AD 中点时, $MNPQ$ 的面积最小, 等于 $\frac{1}{2}$.

25. 如图 39 所示.

26. 每个单元长 12cm, 则长 210cm 的花边共有 $\frac{210}{12} = 17.5$ (个) 单元. 每个单元的彩线长

$$2\pi \times 2 + 2\pi \times 4 + \pi \times 6 = 18\pi.$$

因此, 长 210cm 的花边共需彩线

$$18\pi \times 17.5 \approx 989.1(\text{cm}).$$

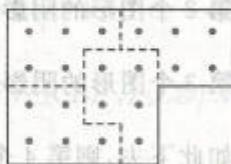


图 39

27. 如图 40, 一个边长是 1 的等边三角形经过两次“延展”操作得到的图形的周长是 $3 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = 5\frac{1}{3}$.



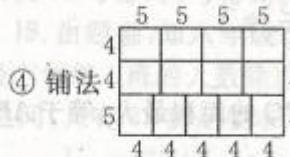
图 40

28. 第二次切之前(即第一次切除后)的矩形的长边长度是 $3+5=8$. 因此, 原来矩形的面积最大是 $3\times 5+5\times 5+8\times 8=104$.

29. ① 中的长、宽均是 5, 4 的倍数, 故可恰好铺满;



③ 无法恰好铺满;



30. 第 1 个图形的阴影部分面积为 $1 - \frac{1}{2}$,

第 2 个图形的阴影部分面积为 $1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{8}$,

第 3 个图形的阴影部分面积为 $1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^5} = 1 - \frac{1}{32}$,

如此下去, 则第 4 个图形的阴影部分面积为 $1 - \frac{1}{2^7}$,

第 5 个图形的阴影部分面积为 $1 - \frac{1}{2^9} = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$.

31. 每列有 6 个长方形, 5 列共有 $6 \times 5 = 30$ (个);

两列合在一起新产生 4 个长方形, 共产生 $4 \times 4 = 16$ (个);

三列合在一起新产生 3 个长方形, 共产生 $3 \times 3 = 9$ (个);

四列合在一起新产生 1 个长方形, 共产生 $1 \times 2 = 2$ (个),

所以图 10 中共有 $30 + 16 + 9 + 2 = 57$ (个) 长方形.

32. 由工序流程图可知, 工序流程的路径有 3 条:

第 1 条: ① $\xrightarrow[1]{a}$ ② $\xrightarrow[?]{c}$ ⑤ $\xrightarrow[4]{e}$ ⑦ $\xrightarrow[1]{g}$ ⑧

第 2 条: ① $\xrightarrow[1]{a}$ ② $\xrightarrow[0]{n}$ ④ $\xrightarrow[3]{d}$ ⑥ $\xrightarrow[3]{f}$ ⑦ $\xrightarrow[1]{g}$ ⑧

其中,工时数为8天,少于10天.

$$\text{第3条: } ① \xrightarrow[1]{m} ③ \xrightarrow[1]{b} ④ \xrightarrow[3]{d} ⑥ \xrightarrow[3]{f} ⑦ \xrightarrow[1]{g} ⑧$$

其中,工时数为9天,少于10天.

因为工程总工时数是10天,所以第1条路径的工时数必为10天,
故工序c所需工时为 $10 - (1+4+1) = 4$ (天).

33.图12的长边上有5个分点(包括端点),所以长边上不同的线段有 $1+2+3+4=10$ (条);类似地,宽边上不同的线段有 $1+2+3=6$ (条),因此,图12中共有长方形 $10 \times 6 = 60$ (个),其中包含边长是1,5的正方形各1个,包含边长是3的正方形2个.

又长边上的10条线段的长分别为:1,3,4,5,4,7,9,8,12,13;宽边上的6条线段的长分别为:1,2,3,3,5,6,故所有长方形的面积和是:
 $(1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 1 \times 5 + 1 \times 6) + (3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 6) + \dots + (13 \times 1 + 13 \times 2 + 13 \times 3 + 13 \times 3 + 13 \times 5 + 13 \times 6) - (1 \times 1 + 3 \times 3 \times 2 + 5 \times 5)$
 $= (1+3+4+5+4+7+9+8+12+13) \times (1+2+3+3+5+6) - 44$
 $= 66 \times 20 - 44 = 1276.$

34.连接CF,设 $\triangle ABF$ 的面积是1, $\triangle AEF$, $\triangle CEF$, $\triangle CDF$,
 $\triangle BDF$ 的面积分别是 a,b,c,d ,则有

$$\frac{1}{d} = \frac{a+b}{c}, \frac{d}{c} = 2, \frac{a}{b} = \frac{1}{3}, \frac{1+a}{b+c+d} = \frac{1}{3}.$$

将 $d = 2c$, $a = \frac{b}{3}$ 分别代入第一式和第四式,解得

$$b = \frac{3}{8}, c = 1.$$

于是 $b+c = \frac{11}{8}$,

所以四边形 $CDFE$ 的面积与 $\triangle ABF$ 的面积比是11:8.

35.设平行四边形 $ABCD$ 的面积为1,则平行四边形 BB_1DD_1 的面积为 $\frac{1}{2}$,平行四边形 BB_1DD_1 两端的两个三角形面积和等于所求

小平行四边形的面积, 即小平行四边形的面积是 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,

故所求的面积比是 $1 : 8$.

36. 图 41 是符合题意且含正方形最少的正视图, 有 5 个正方形.

37. 如图 42, 连接 BC , 得到等腰三角形 ABC 和两个新阴影块, 易知, 这两个阴影块面积之和等于图 16 中的阴影部分面积, 故图 16 中阴影部分的面积

$$S = \frac{1}{2} \times \left(3.14 \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 0.57(\text{cm}^2).$$

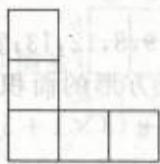


图 41

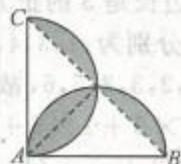


图 42

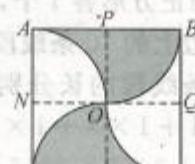


图 43

$$38. S = \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 + \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 + \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 + \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 = \frac{14}{3}\pi.$$

39. 如图 43, 分别取正方形 $ABCD$ 的各边的中点为 P, Q, M, N , 则由边 $AB, \widehat{OA}, \widehat{OB}$ 所围成的阴影部分面积等于正方形 $OPBQ$ 的面积; 由边 $CD, \widehat{OC}, \widehat{OD}$ 所围成的阴影部分的面积等于正方形 $OMDN$ 的面积. 所以阴影部分的面积等于

$$20 \times 20 \div 2 = 200(\text{cm}^2).$$

40. 经过适当的平移与翻转, 可以将 A_1A_3 下面的阴影部分翻转、平移到上面相应的地方, 从而使阴影部分组成直径是 7 的半圆,

$$\text{因此, 阴影部分的面积 } S = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{8}\pi.$$

41. 三个正方体的表面积和是

$$6 \times (5 \times 5 + 2 \times 2 + 1 \times 1) = 180(\text{平方厘米}).$$

两个粘合面积分别是 2×2 和 1×1 , 因此, 新的立体图形的表面积是

$$180 - 2 \times (2 \times 2 + 1 \times 1) = 170 \text{ (平方厘米).}$$

$$42. 9 \times 2 + 10 \times 2 + 8 \times 2 = 54.$$

43. 由题意, 知长方体的长、宽、高的比是 $6 : 3 : 2$, 又由所有棱长的和是 132, 得长、宽、高的和 $= 132 \div 4 = 33$,

因此, 长方体的长、宽、高分别为 $33 \times \frac{6}{6+3+2} = 18$,

$$33 \times \frac{3}{6+3+2} = 9, 33 \times \frac{2}{6+3+2} = 6.$$

$$\text{长方体的表面积} = 2 \times (18 \times 9 + 18 \times 6 + 9 \times 6) = 648.$$

44. 被去掉的部分可看成是 6 个棱长是 1 厘米的小正方体粘贴到一个同样大小的小正方体的 6 个面上, 它的表面积是 $5 \times 6 = 30$ (平方厘米), 其中有 6 个面(边长是 1 厘米)是在原正方体中. 因此, “孔壁”的表面积是 $30 - 6 = 24$ (平方厘米).

正方体原表面“打孔”后剩下的面积是 $8 \times 6 = 48$ (平方厘米).

因此, 被“打孔”的正方体的表面积是 $24 + 48 = 72$ (平方厘米).

45. 由 1, 2, 3, 4, 5 组成的五位数有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (个). 万位是 1, 2, 3, 4 的五位数共有 96 个, 且均比 51234 小, 而 53214 在首位是 5 的五位数中排在第 15 位, 故 53214 排在第 $96 + 15 = 111$ (位).

46. $2879\cdots 9$ (共 20 个 9) + 1 能被 60×24 整除, 表示正好过了整数天, 因此, 所求时间是 10 点 20 分.

$$47. 43 \div (\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{1}{5}) = 30 \text{ (人).}$$

$$48. \text{每夜下滑: } (20 \times 5 - 15 \times 6) \div (6 - 5) = 10 \text{ (分米),}$$

$$\text{井深: } (20 + 10) \times 5 \div 10 = 15 \text{ (米).}$$

49. 设原六位数是 $\overline{abcde2}$, 则新六位数是 $\overline{2abcde}$,

于是有 $10 \cdot \overline{abcde} + 2 = 3 \times (200000 + \overline{abcde})$,

解得 $\overline{abcde} = 85714$,

所以原数是 857142.

$$50. \frac{1}{2} \div \left[\left(\frac{1}{6} \div 20 \right) + \left(\frac{1}{4} \div 15 \right) \right] = 20 \text{ (天).}$$

$$51. 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 6 + 1 + 8 + 1 + 6 + 1 + 4 + 1 + 2 = 39 \text{ (名).}$$

52. 小强看到的是反射在镜面上的钟面,时针、分针经过镜面的反射改变了位置,反射前后钟面左右位置互换.因此,妈妈叫醒小强时,时针和分针分别指向 7 和 2 的位置,而经过镜面反射后指针却为 5 和 10 的位置.所以小强认为当时是 4 点 50 分.

53. 设这个两位数为 \bar{ab} , 则有

$$10a + b = 9b + 6, 10a + b = 5(a + b) + 3, \text{ 即 } 5a - 4b = 3,$$

由 a, b 都是一位数, 得 $a = b = 3$ 或 $a = 7, b = 8$,

因此, 所求两位数是 33 或 78.

54. 该数列的前几项依次是

$$2, 0, 1, 0, 3, 4, 8, 5, 0, 7, 0, 2, 9, 8, 9, \dots,$$

特点是: 偶数、偶数、奇数、偶数、奇数循环出现, 不可能出现连续奇数的情形, 因此, 不会出现 2, 0, 1, 1 连续 4 项.

55. 从图 44, 知两科都没有达到优秀的有

$$35 - 15 - 7 - 9 = 4(\text{人}).$$

56. 该班学生中不喜欢游泳的有 22%, 不喜欢绘画的有 18%, 不喜欢唱歌的有 10%, 不喜欢下棋的有 30%, 所以至少不喜欢其中一种活动的学生最多占全班人数的

$$22\% + 18\% + 10\% + 30\% = 80\%,$$

因此, 该班同时有这四种爱好的学生所占的最小百分比是

$$1 - 80\% = 20\%.$$

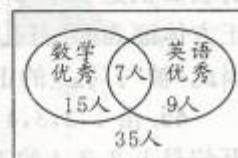


图 44

57. 设瓶子的体积为 1, 则第一个瓶子中酒精与水的体积分别为

$\frac{p}{p+1}$ 和 $\frac{1}{p+1}$, 第二个瓶子中酒精与水的体积分别为 $\frac{q}{q+1}$ 和 $\frac{1}{q+1}$,

混合后总体积为 2, 其中酒精体积为 $\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} =$

$\frac{2pq + p + q}{(p+1)(q+1)}$, 水的体积为 $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)}$, 所以

混合后酒精与水的体积比是 $\frac{p+q+2pq}{p+q+2}$.

58. 设 A、B、C 单独完成这项工作所需时间分别为 a, b, c , 则有

$$a = \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, b = \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}, c = \frac{x}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

$$\text{于是 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{a}, \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{4}{b}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{x}{c},$$

$$\text{前两式相减, 并整理得 } \frac{4}{a} = \frac{5}{b}.$$

$$\text{设 } a = 4t, b = 5t, \text{ 则有 } c = \frac{20}{11}t, \text{ 即 } x = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{9}{11}t.$$

$$59. 300 \div (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}) = 800(\text{米}).$$

60. 设丙的速度为 a 千米 / 时, 30 分钟后甲在乙前面 $0.5 \times (5.4 - 4.2) = 0.6$ (千米), 即此时乙和丙相距 0.6 千米. 再过 5 分钟丙和乙相遇, 所以 $(4.2 + a) \times \frac{5}{60} = 0.6$, 解得 $a = 3$,

因此, 绕湖一周的行程是 $(5.4 + 3) \times 0.5 = 4.2$ (千米).

$$61. \text{ 小兔到达森林公园要跳 } 3000 \div 36 = 83 \frac{1}{3}(\text{分}).$$

$$\text{又 } 83 \frac{1}{3} = 3 \times 27 + 2 \frac{1}{3},$$

所以小兔从 A 地到森林公园的途中共玩耍 27 次, 花时间

$$0.5 + 0.5 \times 2 + 0.5 \times 3 + \dots + 0.5 \times 27 = 189(\text{分}),$$

$$\text{故小兔从 A 地到森林公园需要花 } 83 \frac{1}{3} + 189 = 272 \frac{1}{3}(\text{分}).$$

62. 将这些同学编号: 1, 2, 3, 4, ..., 然后依次对小组个数为 3, 4, 5 的情形进行编组:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3);$$

$$(1, 2, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 6), (4, 5, 6);$$

$$(1, 2, 4, 7), (1, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 9), (4, 5, 6, 10), (7, 8, 9, 10).$$

所以参加这 5 个兴趣小组的同学共有 10 人.

63. 假设共有 100 人考试, $100 - 95 = 5, 100 - 80 = 20,$

$$100 - 79 = 21, 100 - 74 = 26, 100 - 85 = 15,$$

$$5 + 20 + 21 + 26 + 15 = 87(\text{表示 5 题中有 1 题做错的最多人数}),$$

$$87 \div 3 = 29,$$

(表示 5 题中有 3 题做错的最多人数, 即不合格的人数最多为 29 人),
所以合格率不低于 $(100 - 29) \div 100 \times 100\% = 71\%$.

64. n 的值只能在 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 这六个数中选取(因为 $\frac{1}{5} + \frac{6}{7} > 1$), 所以最多尝试六次可得答案, $n = 5$.

故第三个箱子里共有螺帽 $303 \div \left[1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{7} \right) \right] \times \frac{5}{7} = 2525$ (只).

65. 设足球表面共有 x 个五边形. 每个五边形与 5 个六边形相连, 则有 $5x$ 个六边形, 可是每个六边形与 3 个五边形相连, 即每个六边形被数了 3 遍, 所以六边形有 $\frac{5}{3}x$ 个, 于是 $x : \frac{5}{3}x = 3 : 5$.

66. 下表是所有不同的放法, 共 23 种.

10	9	8	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3
0	1	2	1	3	2	1	4	3	2	2	5	4	3	3	2	4	4	3	3	2	3
0	0	0	1	0	1	1	0	1	2	1	0	1	2	1	2	2	1	3	2	2	3
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	2	1

表格中的数字表示放入某个信封中的 100 元人民币的数量.

67. 6 人做相对运动, 可假设速度最慢的人不动.
30 分钟, 速度最快的人走了一圈的六分之五, 完成一圈还剩六分之一, 所需时间是 $30 \div 5 = 6$ (分).

68. 设走上坡路的速度是 x 千米 / 时, 则 $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{6}} = 4$, $x = 3$.

69. 由“甲车行完全程用 8 小时, 乙车行完全程用 10 小时”, 知相遇时甲行了 10 份, 乙行了 8 份(总路程为 18 份), 两车相差 2 份. 又两车在距中点 40 千米处相遇, 说明两车的路程差是 80 千米. 所以 AB 两地相距 $(40 + 40) \div (10 - 8) \times (10 + 8) = 720$ (千米).

70. 甲多走的路程用时 $30 + 6 - 2 - 20 = 14$ (分), 所以从发现忘记带作业的地点到家用时 7 分钟,
因此, 所求比值是 $7 : (20 - 7) = 7 : 13$.

71. 体育委员可以自由支配的钱数是 $100 - 3 \times 24 - 1 \times 26 =$

2(元),只可能购买0、1、2瓶矿泉水,即有3种购买方法.

72. 用数字0表示红色,1表示白色,如01010就是一种涂色方法,涂色方法共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ (种),其中有8个:

00000,00100,01010,10001,01110,10101,11011,11111

的逆序是不变的,而其余的则是逆序后不同的,如01001和10010,但它们只能算一种.

由此可知,不同的涂色方法的种数是

$$8 + (32 - 8) \div 2 = 8 + 12 = 20.$$

73. 设原定得一等奖的平均分为x分,二等奖的平均分为y分,

$$\text{则 } (x+3) \times (10-4) + (y+1) \times (20+4) = 10x + 20y,$$

$$\text{得 } x - y = 10.5(\text{分}).$$

74. $9999 \div 74 = 135 \cdots \cdots 9$,又 $135 \times 74 = 9990$,即9990是74的倍数, $2011 \div 3 = 670 \cdots \cdots 1$,故所求余数为9.

75. 显然,为了使3种糖果的总数最少,应尽量多买黄色糖果,但购买黄色和绿色糖果的费用都是整数角不会产生几分. 所以2分, $10n + 2$ 分应是购买红色糖果的费用, n 最小取3, $10n + 2 = 32$ 才是8的倍数,所以至少要买4粒红色糖果,此时剩下 $122 - 32 = 90$ (分), $90 = 20 \times 4 + 10$,所以小萌至少买3种糖果共 $4 + 1 + 4 = 9$ (粒).

76. 由于各牌的点数都等于 $2 \times$ 奇数,即

$$2 = 2 \times 1, 6 = 2 \times 3, 10 = 2 \times 5.$$

从12张牌中任取7张牌,其点数之和等于2乘以7个奇数之和,仍是一个奇数的两倍. 但 $52 = 2 \times 26$ 是一个偶数的两倍. 因此,不能从所给的12张牌中选出7张牌,使其点数之和等于52.

77. 两个数字位置对调的数,它们的差是9的倍数,不难得出,题目的全部条件只有在甲与乙的年龄差等于9的情况下才能实现,那么丙的年龄就是9的二分之一,即4岁半,乙的年龄是丙的10倍,即45岁,则甲是54岁.

78. 边长是1的正三角形有24个,边长是2的正三角形有12个,边长是3的正三角形有2个,共38个.

$$79. 1 \times 28 + 3 \times 21 + 21 \times 3 + 28 \times 1 = 182.$$

80. 连接BE.

因为 $AE : EC = 1 : 1$,
 所以 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBE$ 的面积相等,
 所以 $\triangle ABE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{2}$.
 又因为 $AD : BD = 1 : 2$,
 所以 $\triangle ADE$ 的面积是 $\triangle ABE$ 的面积的 $\frac{1}{3}$, 是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{6}$.
 故所求的两个三角形的面积比是 $1 : 6$.

81. 如图 45, 共有 6 种.

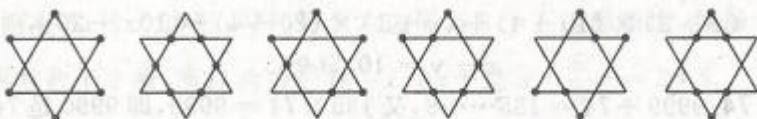


图 45

82. $8 \times 4 + 9 \times 8 + 2\pi \approx 110.28(\text{cm})$.

83. 如图 46, 设正六边形的对角线交于点 O ,
 AQ 交 BE 于 R , 则 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{6} \times 54 = 9$,

$$S_{\triangle EFP} = S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{3} \times 9 = 3,$$

$$S_{\triangle APR} = 2S_{\triangle EFP} = 6,$$

$$S_{\triangle PRQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle APR} = \frac{1}{3} \times 6 = 2,$$

故 $S_{CEPQ} = 54 - 9 - 3 - 3 - 6 - 2 = 31$.

84. 阴影部分的面积是边长为 20cm 的正方形的面积减去半径是 10cm 的圆的面积, 即

$$20 \times 20 - \pi \times 10 \times 10 = 400 - 314 = 86(\text{cm}^2).$$

85. 阴影部分的面积是 $\frac{1}{4}$ 大圆的面积加上 $\frac{1}{4}$ 小圆的面积减去长方形 $ABCD$ 的面积, 即

$$S = \frac{1}{4}\pi \times 6^2 + \frac{1}{4}\pi \times 2^2 - 6 \times 2 = 19.4.$$

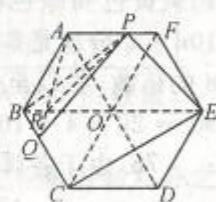


图 46

86. 由于最大的圆的半径是 10, 那么小圆的半径是 5, 如图 47, 阴影部分的面积是 2 个 $\frac{1}{4}$ 小圆面积减去正方形 ABCD 的面积的 4 倍, 而正方形 ABCD 的边长是 5, 所以阴影部分的面积是

$$S = 4 \times \left(\frac{1}{4} \pi \times 5^2 \times 2 - 5^2 \right) = 57.$$

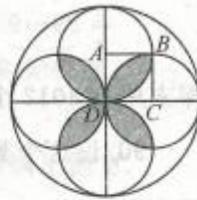


图 47

87. 在第一圈中, 删去的数是 $6n+1, n=1, 2, 3, \dots, 335$,

最后删去的数是 $335 \times 6 + 1 = 2011$,

第 336 次(即第二圈中第一个)删去的数是 5;

第 337 次删去的数是 12; 第 338 次删去的数是 20;

第 339 次删去的数是 27; 第 230 次删去的数是 34.

88. 连接 AD, 设 $\triangle ABO$ 的面积是 S_1 ,

$\triangle BCO$ 的面积是 S_2 , $\triangle ADO$ 的面积是 S_3 ,

$\triangle CDO$ 的面积是 S_4 , 则有

$$S_1 + S_2 = 44, S_3 + S_4 = 128,$$

$$S_2 + S_4 = 88,$$

$$S_1 + S_3 = 16^2 - 20 - 64 - 88 = 84,$$

又 $S_1 : S_2 = S_3 : S_4$,

于是 $S_2 = 44 - S_1, S_3 = 84 - S_1,$

$$S_4 = 88 - S_2 = 44 + S_1,$$

$$\frac{S_1}{44 - S_1} = \frac{84 - S_1}{44 + S_1},$$

解得

$$S_1 = \frac{924}{43},$$

因此, 所求阴影部分的面积 $= S_1 + S_4 = 44 + 2S_1 = 86 \frac{42}{43}$.

89. $99\dots9 \times 99\dots9 + 199\dots9$

$$= (10^{2006} - 1) \times \underbrace{99\dots9}_{2006 \text{ 个 } 9} + \underbrace{199\dots9}_{2006 \text{ 个 } 9}$$

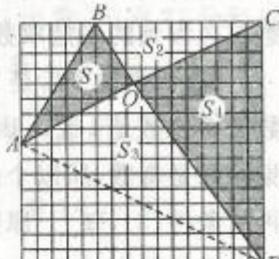


图 48

$$= \underbrace{99\cdots 9}_{2005个9} \times 10^{2006} - \underbrace{99\cdots 9}_{2005个9} + \underbrace{1\ 99\cdots 9}_{2006个9} = 10^{4012},$$

即末尾有 4012 个连续的零.

90. 设这个数是 \overline{aabb} .

因为 $\overline{aabb} = \overline{a0b} \times 11$, 它是完全平方数,

则 $\overline{a0b}$ 是 11 的倍数.

根据被 11 整除的数的特征, 可知 $a+b$ 能被 11 整除, 则

$$a+b = 11 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6.$$

直接验算, 可知这个数是 $7744 = 88^2$.

91. “单数”.

第三名看到的不全是双数, 因为那样他就知道他的号码是单数.

第二名看到的不是双数, 否则他也知道自己的号码是单数.

92. 原数加 1 后是 15 的倍数, 又 15 的倍数必是 5 的倍数. 所以原数的个位数是 4 或 9. 因为原数减去 3 后是 38 的倍数, 是一个偶数, 可见原数是奇数, 所以个位数只能是 9.

再从条件(3), 知 原数的个位数字与千位数字之和是 10,

所以千位数字是 $10 - 9 = 1$.

设原数为 $38m + 3$ (m 为自然数), 则有

$$1009 \leqslant 38m + 3 \leqslant 1999, \text{ 即 } 1006 \leqslant 38m \leqslant 1996,$$

$$26 < 1006 \div 38 \leqslant m \leqslant 1996 \div 38 < 53,$$

因为原数 $38m + 3$ 的个位数字是 9, 所以 $38m$ 的个位数字是 6, 从而 m 的个位数字为 2 或 7. 在 26 到 53 之间, 个位数字为 2 或 7 的数有 27、32、37、42、47、52.

另一方面, 原数加 1 后是 15 的倍数, 可设原数为 $15n - 1$. 于是

$$15n - 1 = 38m + 3, \text{ 即 } 3 \times 5n = 2 \times (19m + 2).$$

由此, 知 3 能整除 $19m + 2$,

又 $19m + 2 = 6 \times 3m + m + 2$,

所以 $m + 2$ 是 3 的倍数, 即 m 被 3 除余 1.

在 27、32、37、42、47、52 中, 只有 37 和 52 被 3 除余 1, 即

$$m = 37 \text{ 或 } 52.$$

又 $38 \times 37 + 3 = 1409$, $38 \times 52 + 3 = 1979$, 经检验满足题意.

故所求四位数是 1409 或 1979.

93. 两车所行路程相等, 轿车速度是中巴速度的 1.25 倍, 所以中巴实际行车时间是轿车的 1.25 倍. 中巴比轿车多行 $11 + 7 - 10 = 8$ (分), 这 8 分钟相当于轿车行车时间的 $1.25 - 1 = 0.25$ (倍), 即轿车行车时间是 $8 \div 0.25 = 32$ (分), 中巴实际用了 $32 + 8 = 40$ (分).

中巴行到中点用 $40 \div 2 = 20$ (分), 中巴 10 点出发, 10 点 20 到中点, 10 点 30 分离开中点.

轿车行到中点用 $32 \div 2 = 16$ (分), 轿车 10 点 11 出发, 10 点 27 分经过中点, 可见 10 点 27 分轿车在中点处超过中巴车.

$$94. A \times \overline{CB} = \overline{DDD} = D \times 111 = D \times 3 \times 37.$$

所以 $\overline{CB} = 37$ 或 74 (即 2×37),

如果 $\overline{CB} = 37$, 则 $A = 3D$; 如果 $\overline{CB} = 74$, 则 $2A = 3D$.

于是 A 、 B 、 C 和 D 的值有六种可能, 如下表:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
\overline{CB}	37	37	37	74	74	74
D	1	2	3	2	4	6
A	3	6	9	3	6	9

由于每个字母代表一个不同的数字, 故(1)、(3)、(5) 可排除; 将(2)、(4)、(6) 的数值代入运算, 得到以下算式:

$$\begin{array}{r} & 6 & & 3 & & 9 \\ \times & 3 & 7 & \times & 7 & 4 \\ \hline & 4 & 2 & & 1 & 2 \\ & 1 & 8 & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & 6 & 3 \\ & & & & \hline & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

图 49

其中, 只有(2)是每个字母各代表一个不同的数字, 所以 $D = 2$.

95. 设每边四个数之和是 S , 计算三条边上的数的和时有 3 个数被计算了两次, 设这 3 个数的和是 d , 则

$$(1+2+3+\cdots+9)+d=3S,$$

即 $45+d=3S$,

由此, 知 d 是 3 的倍数, 则其取值范围是 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 其中

$$6=1+2+3, 24=7+8+9,$$

对应这两种情况的填法如图 50 所示.

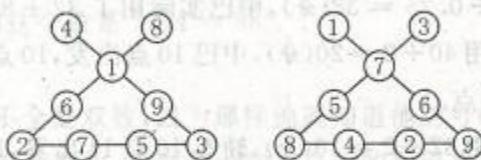


图 50

96. 图 51 中的虚线表示看不见的正方形的边, x 和 y 表示对应的矩形面积, 则

$$20-x=14, \text{ 即 } x=6,$$

$$20-(x+y)=8+y,$$

所以 $2y=12-x=6, y=3$,

于是, 矩形 $EFCD$ 的面积等于

$$20+8+y=38+3=31,$$

因此矩形 $DEFC$ 的面积 : 正方形 $DEHG$ 的面积 $= CD : GD$,

即 $CD : GD = (20+8+3) : 20 = \frac{31}{20}$,

同理, 正方形 $ABCD$ 的面积 : 矩形 $EFCD$ 的面积

$$= AD : ED = CD : GD = \frac{31}{20},$$



图 51

所以正方形 $ABCD$ 的面积 = 矩形 $EFCD$ 的面积 $\times \frac{31}{20} = 31 \times \frac{31}{20} = \frac{961}{20}$.

97. 如图 52, 连接 BD, ED, BG , 则 $\triangle EAD, \triangle ADB$ 同高, 所以面积比等于底的比, 即

$$S_{\triangle EAD} = \frac{EA}{AB} S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ABD},$$

同理

$$S_{\triangle EAH} = \frac{AH}{AD} S_{\triangle ABD} = 6S_{\triangle ABD},$$

$$S_{\triangle FCG} = 6S_{\triangle ABC},$$

所以 $S_{\triangle EAH} + S_{\triangle FCG} = 6(S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = 6S_{ABCD} = 30$ (平方厘米).

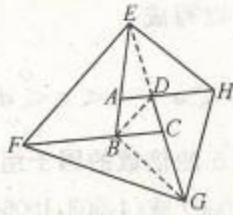


图 52

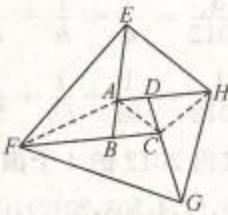


图 53

如图 53, 连接 AC, AF, HC , 得

$$S_{\triangle EFB} = 6S_{\triangle ABC}, S_{\triangle DHG} = 6S_{\triangle ACD},$$

$$S_{\triangle EFB} + S_{\triangle DHG} = 6(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}) = 6S_{ABCD} = 30(\text{平方厘米}).$$

故四边形 $EFGH$ 的面积 = $30 + 30 + 5 = 65$ (平方厘米).

98. 6 队单循环赛一共进行 15 场比赛, 每场比赛两队得分之和为 3 或 2, 所以 $30 \leqslant$ 总分 $\leqslant 45$. 因为第三名比赛 5 场共得 8 分, 即为 2 胜 2 平 1 负, 即 15 场比赛中至少有 2 场平局, 至多有 12 场平局, 所以 $33 \leqslant$ 总分 $\leqslant 43$. 因为各队得分成等差数列, 所以只可能是 $12, 10, 8, 6, 4, 2$, 即总分为 42 分. 15 场比赛没有平局时总分为 45 分, 每出现 1 场平局总分减少 1 分, 所以共有 $45 - 42 = 3$ (场) 平局.

99. 先把 18 发子弹的分数全写下来, 然后把它们列成 3 行(每行 6

个数),使每行数的和都是 71 分.

只有下面一种排列法:

第一行:25、20、20、3、2、1——共 71 分;

第二行:25、20、10、10、5、1——共 71 分;

第三行:50、10、5、3、2、1——共 71 分.

甲开始 2 发,共得 22 分,所以他的得分是第一行的分数,

因为只有在这一行里才有 2 次分数加起来等于 22.

丙第一发子弹得 3 分,所以他得的是第三行的分数(因为第二行里没有 3 分),50 分就在这一行里,从而射中靶心的是丙.

$$100. \frac{5}{2012} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ 可以写成}$$

$$\frac{1}{2012} = \frac{1}{5a} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{5c} + \frac{1}{5d}, 0 < a < b < c < d,$$

于是只要求出 2012 的 4 个因子之和是 5 的倍数的因子组,则有

(1,2,4,503),(1,4,503,2012),(2,4,503,1006) 或(4,503,1006,2012).

取因子组(1,2,4,503),则有

$$\frac{1}{2012} = \frac{1}{2012} \times \left(\frac{1}{510} + \frac{2}{510} + \frac{4}{510} + \frac{503}{510} \right),$$

$$\text{即 } \frac{5}{2012} = \frac{1}{2012 \times 102} + \frac{1}{1006 \times 102} + \frac{1}{503 \times 102} + \frac{1}{4 \times 102},$$

$$\text{所以 } a = 4 \times 102, b = 503 \times 102,$$

$$c = 1006 \times 102, d = 2012 \times 102;$$

取(1,4,503,2012),得

$$a = 504, b = 4 \times 504, c = 503 \times 504, d = 2012 \times 504;$$

取(2,4,503,1006) 得,

$$a = 303 \times 2, b = 303 \times 4, c = 303 \times 503, d = 303 \times 1006;$$

取(4,503,1006,2012),得

$$a = 705, b = 705 \times 2, c = 705 \times 4, d = 705 \times 503.$$



分享学习, 分享快乐
Share learning, Share happiness