

2013年第十一届希望杯考前培训100题参考答案

答·提示

1. 原式 $=\frac{3}{4}\div\left[\frac{21}{20}\times\frac{3}{7}\right]=\frac{3}{4}\div\frac{9}{20}=\frac{3}{4}\times\frac{20}{9}=\frac{5}{3}$.

2. 原式 $=2012\times2014\times\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$
 $=2012\times2014\times\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)=2.$

3. 原式 $=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)\right]$
 $=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{99\times100}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{4949}{9900}=\frac{4949}{19800}.$

4. 原式 $=\left(\frac{2}{9}+\frac{345-3}{990}\right)\times\frac{6}{9}\times\frac{789-7}{990}\times\frac{495}{562}=\frac{391}{1485}.$

5. 原式 $=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+\frac{3}{2}$
 $+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{128}+\frac{3}{256}+\frac{3}{512}+\frac{3}{1024}$
 $=\frac{1}{2}\times(1+19)\times10+3\left(1-\frac{1}{1024}\right)=102\frac{1021}{1024}.$

6. 令 $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, 则

原式 $=(1+A)\times\left(A+\frac{1}{7}\right)-\left(1+A+\frac{1}{7}\right)\times A=\frac{1}{7}.$

7. 设现在哥哥的年龄为 x , 弟弟的年龄为 y , 则
由题意可知 $x+3=2y$, $x=y+3$, 解得 $x=9$, $y=6$.
所以今年, 哥哥9岁, 弟弟6岁.

8. 设原来白棋有 $3x$ 粒, 则原来黑棋有 $6x$ 粒, 于是

$$5x + 20 = 6x, x = 20.$$

故这堆棋子原来共有 $9x = 9 \times 20 = 180$ (粒).

9.

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= S_{\text{圆}} - S_{\text{正方形}} \\ &= \pi \times 8^2 - 12^2 = 64\pi - 144 \approx 48(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

10. 因为 $8 = 2^3, 18 = 2 \times 3^2, 24 = 2^3 \times 3, 49 = 7^2,$

$55 = 5 \times 11, 60 = 2^2 \times 3 \times 5, 65 = 5 \times 13, 77 = 7 \times 11,$

$81 = 3^4, 98 = 2 \times 7^2, 100 = 2^2 \times 5^2,$

所以这些数的最小公倍数是 $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13.$

11. 假设丙有 x 块糖, 则乙至少有 $3x + 1$ 块糖, 甲至少有 $2(3x + 1) + 1$ 块糖, 令 $x + (3x + 1) + [2(3x + 1) + 1] = 200$,
则 $10x = 196$, 即 $x = 19.6.$

当 $x = 20$ 时, 丙有 20 块糖, 则乙至少有 61 块糖, 甲至少有 123 块糖, $20 + 61 + 123 = 204 > 200$, 不符合题意.

当 $x = 19$ 时, 丙有 19 块糖, 则乙至少有 58 块糖, 甲至少有 117 块糖, $19 + 58 + 117 = 194 < 200$, 符合题意. 此时, 甲可以有 $117 + (200 - 194) = 123$ 块糖. 同理,

甲	乙	丙	甲 + 乙 + 丙
123	58	19	200
122	59	19	200
121	60	19	200
123	61	19	$203 > 200$

当 $x = 18$ 时, 丙有 18 块糖, 则乙至少有 55 块糖, 甲至少有 111 块糖, $18 + 55 + 111 = 184 < 200$, 符合题意. 此时, 甲可以有 $111 + (200 - 184) = 127$ 块糖.

当 $x = 17$ 时, 丙有 17 块糖, 则乙至少有 52 块糖, 甲至少有 105 块糖, $17 + 52 + 105 = 174 < 200$, 符合题意. 此时, 甲可以有 $105 + (200 - 174) = 131$ 块糖.

故甲最少有 121 块糖, 丙最多有 19 块糖.

12. 设钢琴班的总人数为 a , 则小提琴班的总人数为 $\frac{7}{9}a$. 于是所

求比值是 $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9}a\right) : \left(a + \frac{7}{9}a\right) = \frac{9}{16}.$

13. 因为由约数定理知 $N = a^p \cdot b^q$ (其中 a, b 互质, p, q 为整数) 的约数个数为 $(p+1) \cdot (q+1)$.

所以有 12 个约数的“好数”由小到大依次是:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5, 72 = 2^3 \times 3^2, 84 = 2^2 \times 3 \times 7,$$

于是将这些数由小到大排列在一起,第三个是 84.

14. 设井深是 h 米, 则 $2(h+9) = 3(h+2), h = 12$.
于是绳子的长是 $2 \times (12+9) = 42$ (米).

15. 所有人的梨个数应当尽量接近, 10 个同学先分别得到: 1, 2, 3, …, 10 个梨, 剩下的梨除以 10 得

$$[100 - (1 + 2 + 3 + \dots + 10)] \div 10 = 45 \div 10 = 4 \dots \dots 5,$$

所以再给每个同学增加 4 个梨, 后 5 个同学每人再增加 1 个梨, 10 个同学得梨个数应分别为: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15.
于是得到梨最多的同学至少得 15 个.

16. 因为 $31500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$, 所以与 6 互质的数不能含 2 和 3, 故只能是 $5^3 \times 7$ 的约数, 共有 $4 \times 2 = 8$ (个).

17. 如图 21, 设 $S_{ADOE} = x, S_{\triangle OBC} = y$, 则

因为 $S_{\triangle ABC} = 24$, D 是 AB 边的中点,

$$\text{所以 } x + b = y + a = 24 \div 2 = 12,$$

$$\text{而 } AE : EC = 2 : 1,$$

$$\text{所以 } x + a = \frac{2}{3} \times 24 = 16.$$

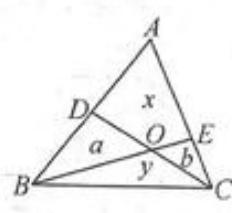


图 21

$$\text{于是 } a - b = (x + a) - (x + b) = 16 - 12 = 4.$$

18. 设三个数分别为 $a, a+1, a+2$ (其中 a 是大于 1 的自然数),

$$\text{因为 } 9 \mid a, 7 \mid (a+1), 5 \mid (a+2),$$

$$\text{所以 } 9 \mid 2a, 7 \mid (2a+2), 5 \mid (2a+4),$$

$$\text{于是 } 9 \mid [2a+9], 7 \mid [(2a+2)+7], 5 \mid [(2a+4)+5],$$

因为 9, 7, 5 的最小公倍数是 $[9, 7, 5] = 315$,

$$\text{所以 } 2a+9 = 315, a = 153.$$

故三个自然数最小分别为 153, 154, 155.

19. 由于公交车速度不变, 发车间隔时间相等, 所以发车的间隔距离 S 也相等, 所以 $S = 3(V_{\text{苏}} + V_{\text{公}}) = 12(V_{\text{苏}} - V_{\text{公}})$,

$$\text{于是 } 3V_{\text{苏}} + 3V_{\text{公}} = 12V_{\text{苏}} - 12V_{\text{公}}, 5V_{\text{公}} = 3V_{\text{苏}},$$

所以 $T_{\text{苏}} = \frac{3}{5} T_{\text{公}} = 45 \times \frac{3}{5} = 27$ (分钟).

$$\begin{aligned} 20. & 123456789101112 \cdots 2054 \\ & \equiv (1+2+3+4+5+6+\cdots+2+0+5+4) \pmod{9} \\ & \equiv (1+2+3+4+5+6+\cdots+2054) \pmod{9} \\ & \equiv [(1+2054) \times 2054 \div 2] \pmod{9} \\ & \equiv 3 \pmod{9}. \end{aligned}$$

21. 假设纵波与横波所用时间相等, 即纵波经过监测点后继续传播 18.5 秒, 那么纵波比横波一共多传播 “ 3.96×18.5 ” 千米, 而这个相等的时间为 $3.96 \times 18.5 \div (3.96 - 2.58) \approx 53.1$ (秒). 因此这次地震的地震中心距离地震监测点:

$$2.58 \times 53.1 \approx 137 \text{ (千米)}.$$

22. 因为 a, b 都是非零自然数, $n = a + b + ab$, 所以可列表如下:

a	1	1	1	1	1
b	1	2	3	\cdots	9
n	3	5	7	\cdots	19

显然, 3, 5, 7, ..., 19 这 9 个奇数都是“联谊数”.

经验证, 还有如下情况:

a	2	2	2	4
b	2	4	6	4
n	8	14	20	$24 > 20$

那么从 1 到 20 这 20 个自然数中“联谊数”共有 12 个.

23. 由已知得,

5 甲 = 乙 + 丙 + 丁, 4 乙 = 甲 + 丙 + 丁, 3 丙 = 甲 + 乙 + 丁,
所以甲 = $\frac{1}{6} \times$ 四人总和, 乙 = $\frac{1}{5} \times$ 四人总和, 丙 = $\frac{1}{4} \times$ 四人总和,

于是 丁 = 四人总和 - (甲 + 乙 + 丙) = $\frac{23}{60} \times$ 四人总和,

由于丁付了 46 元, 所以四人总和 = $46 \div \frac{23}{60} = 120$ (元).

24. 列出一些数: $1_3 = 1_9, 2_3 = 2_9, 10_3 = 3_9, 11_3 = 4_9, 12_3 = 5_9, 20_3 = 6_9, 21_3 = 7_9, 22_3 = 8_9, 100_3 = 10_9, \dots$

观察发现,3进制与9进制有一定的对应关系,即从末位向前每2位3进制可对应1位9进制;相应的数字和至少是相等的,而最大可以是3倍的关系,例如:

相等: $1_3 = 1_9$, $2_3 = 2_9$;3倍: $21_3 = 7_9$,

所以按此规律,9进制中数字和最小为24,最大为 $24 \times 3 = 72$.

25.(1) 末尾“0”的个数与N中因数2,5的个数有关.

N中因数“2”的个数是

$$\left[\frac{210}{2} \right] + \left[\frac{210}{4} \right] + \left[\frac{210}{8} \right] + \left[\frac{210}{16} \right] + \left[\frac{210}{32} \right] + \left[\frac{210}{64} \right] + \left[\frac{210}{128} \right] = 206.$$

$$\text{同理, } N \text{ 中因数“5”的个数是 } \left[\frac{210}{5} \right] + \left[\frac{210}{25} \right] + \left[\frac{210}{125} \right] = 51,$$

由于2的个数比5的个数多,所以结果只看5的个数,故51为所求.

(2) 因为 $12 = 2 \times 2 \times 3$,所以N中因数“3”的个数是

$$\left[\frac{210}{3} \right] + \left[\frac{210}{9} \right] + \left[\frac{210}{27} \right] + \left[\frac{210}{81} \right] = 102,$$

每2个“2”和1个“3”进行组合,可以组合成“12”,故N可以除以102次12.

26. 易知 $a = 2, b = 4, c = 3$,则 $(a+b+c)^2 = 81$.

27. 这8个数除以9的余数分别为4,2,1,1,3,1,8,4,

而相邻之和是3的倍数而不是9的倍数的有(4,2),(2,1),(8,4),(3,1,8),(1,1,3,1),(4,2,1,1,3,1),(4,2,1,1,3,1,8,4),

所以这列数中满足题意的数共有7组.

28. 设A校男生,女生人数分别是 $8a, 7a$,B校男生,女生人数分别是 $30b, 31b$,则 $\frac{8a+30b}{7a+31b} = \frac{27}{26}, a = 3b$.

所以合并前A,B两校人数的比是 $\frac{8a+7a}{30b+31b} = \frac{(8+7)a}{(30+31)b} = \frac{45}{61}$.

29. 假设甲说错了,其他三人都对,则乙丙丁三人都不是最差,即甲最差,这与甲说错了矛盾;

假设乙说错了,其他三人都对,则乙是考得最差的,与甲说的矛盾;

假设丙说错了,其他三人都对,则 $乙 > 丙 > 丁 > 甲$,所有人的说法都符合;

假设丁说错了,那么丁最差,且比丙高,这本身就是个矛盾.
所以这四人的实际成绩从高到低依次是:乙>丙>丁>甲.

30. 设斜坡路程为 s , 则

$$\frac{v}{s} = \frac{2s}{\frac{s}{5} + \frac{s}{7}} = \frac{2s}{\frac{12s}{35}} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6}.$$

31. 因为 $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$,

而 三个连续偶数中必有一个且只有一个能被 3 整除,
所以这个能被 3 整除的数至少是 18, 此时这三个数分别为 14, 16, 18.
经验证, 当这三个数大于 18 时, 没有符合条件的 3 个数.
所以这三个自然数的和是 $14 + 16 + 18 = 48$.

32. 因为 这个数除以 7 余 4, 除以 9 余 6,
所以将这个数加 3 后既是 7 的倍数, 又是 9 的倍数, 即 63 的倍数,
于是满足前两个条件的最小数为 $7 \times 9 - 3 = 60$, 然后是 60, 123, 186, ...
这其中除以 11 余 2 的数最小为 123. 故 123 为所求.

33. 设旺季是按照 $x\%$ 的利润定价, 则

$$100\% \times 45.2\% = 40\% \times 38\% + (1 - 40\%)x\%, x = 50,$$

所以旺季价格是原定价的 $150\% \div 200\% \times 100\% = 75\%$.

34. 设空气严重污染城市有 x 座, 则

$$(3x + 52) + 2x + x = 664, x = 102.$$

$$35. 20 \times 30 \div 2 + 20 \times (10 + 20) \div 2 = 600.$$

36. 先考虑千位, 当千位是 0、1 时, 百位有 0、1、2、3 四种选法, 十位有 0、1、2 三种选法, 个位有 0、1 两种选法, 当千位是 2 时, 2000 ~ 2011 共 12 个数, 但仅 4 个符合要求. 因为 0000 不在 1 ~ 2013 之间, 不符合要求, 所以不进位的数共有 $2 \times 4 \times 3 \times 2 + 4 - 1 = 51$ (个).

37. 从六个点中任选 3 个有 $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 种方法.

其中, 若选 A, E, B 或 B, C, F, 则不能构成三角形,

所以 $20 - 2 = 18$ 为所求.

38. 由 $\frac{8}{13} < \frac{x}{4} < \frac{25}{27}$, 知 $2 \frac{6}{13} < x < 3 \frac{19}{27}$, 故 $x = 3$.

39. 平移阴影部分后, 知阴影部分的面积恰是最大圆面积的 $\frac{1}{4}$,

所以图中阴影部分面积与非阴影部分的面积之比是 $1:3$.

40. 第1斜行有1个数;第2斜行有2个数;第3斜行有3个数;
而 $1+2+3+4+5+\cdots+62=(1+62)\times62\div2=1953$,

$1+2+3+4+5+\cdots+62+63=(1+63)\times63\div2=2016$,
所以 第62斜行共有1953个数.

又因为偶数斜行的数是从右上向左下排列,奇数斜行的数是从左下向右上排列,所以2013排列在第63斜行从左下向右上排列的第 $2013-1953=60$ (个)数,即第60列;位于第 $63-60+1=4$ (行).
故 $2013=(4,60)$.

$$41. 5\times5-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times3\times2-\frac{1}{2}\times1\times4=18.$$

另解 用拼补法正好可以拼成18个方格,所以面积为18.

42. 只有当表示月份的数字和表示日的两个数字都在 $1\sim12$ 中才有可能发生混淆,但如果这两数字相等(如10/10)则不会混淆,所以一年中这种容易混淆不清的日期表示共有 $12\times12-12=132$ (天).

$$\begin{aligned} 43. \text{原式} &= \frac{1^2}{1\times2} + \frac{2^2}{1\times2} + \frac{2^2}{2\times3} + \frac{3^2}{2\times3} + \frac{3^2}{3\times4} + \frac{4^2}{3\times4} + \\ &\quad \frac{4^2}{4\times5} + \frac{5^2}{4\times5} + \cdots + \frac{2012^2}{2012\times2013} + \frac{2013^2}{2012\times2013} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2012} \\ &= \frac{2}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2011}{2012} + \frac{2013}{2012}\right) + \frac{2012}{2013} \\ &= 4024\frac{2012}{2013}. \end{aligned}$$

44. 先选10的三个约数,如5、2和1,表示成连减式 $5-2-1$ 和连加式 $5+2+1$.

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{(4)} - \frac{1}{(10)} - \frac{1}{(20)} = \frac{1}{(80)} + \frac{1}{(40)} + \frac{1}{(16)},$$

如果选10、5、2,那么有 $\frac{1}{10} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{85}$.

45. 如图22,连结DF.因为 $\frac{CD}{BD} = \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{CD}{BC} = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{3}$, $S_{\triangle ABD} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$,

因为 E, G 分别是 AD, ED 的中点,

所以 $2S_{\triangle BDE} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$,

$$S_{\triangle DEF} = 2S_{\triangle EFG} = 2, S_{\triangle BDE} = 3S_{\triangle DEF} = 6,$$

于是 $S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle BDE} = 12$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{3}{2} \times 12 = 18$.

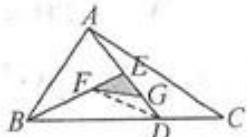


图 22

46. $S_1 = S_2 = S_3$.

47. 因为 两个圆柱直径的比是 $20:24$, 半径比是 $5:6$,

所以 底面面积的比是 $25:36$,

因为 铁块在两个杯中排开的水的体积相同,

故所求高度应是甲杯中下降的高度的 $\frac{25}{36}$, 即 $6 \times \frac{25}{36} = \frac{25}{6}$ (厘米).

48. 设任务总量是 s , 原来每天的效率是 v , 则

$$\frac{\frac{1}{3}s}{v} + \frac{\frac{2}{3}s}{(1+20\%) \times \frac{4}{5}v} = 185, \frac{s}{v} = 180(\text{天}).$$

49. 因为 $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$, $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 同奇偶,

所以 “吉祥数”是奇数或是 4 的倍数.

于是 每 4 个数中有 3 个“吉祥数”(1 至 4 内只有 3).

因为 $2011 \div 3 = 670 \cdots 1, 671 \times 4 = 2684$,

所以 2684 是第 2011 个“吉祥数”.

于是 2684 下面的“吉祥数”依次是 2685, 2687.

故第 2013 个“吉祥数”是 2687.

50. 设第 1 个数是 x , 则第 2 个数是 $\frac{4(x-1)}{5}$, 第 3 个数是

$$\frac{4\left(\frac{4(x-1)}{5}-1\right)}{5} = \frac{4(4x-9)}{25}.$$

因为 三个数都是整数,

所以 $(x-1)$ 应是 5 的倍数, $(4x-9)$ 应是 25 的倍数.

于是满足条件的 x 的最小值是 21, 即第 1 个数的最小值是 21.

51. 设同时参加两个班的有 x 人, 则只参加围棋班的人数是 $\frac{5}{2}x - x = \frac{3}{2}x$, 只参加体操的人数是 $\frac{9}{4}x - x = \frac{5}{4}x$.

故只参加体操的人数: 只参加围棋班的人数 $= \frac{5}{4}x : \frac{3}{2}x = \frac{5}{6}$.

52. 设甲的成本是 x 元, 则

$$x \times 130\% \times 90\% + (1600 - x) \times 140\% \times 85\% = 1600 + 290,$$

$$x = 700.$$

53. 用倒数法易知 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$, 于是整数 a, b, c, d, e 中最大的是 $e=5$.

54. 设每个杯子降价 x 元, 预计销量为 y , 则

$$88y \times \left(1 + \frac{3}{20}\right) = (88 - x) \cdot \frac{5}{4}y, x = 7.04.$$

55. 设连续的三个自然数是 $n-1, n, n+1$ (其中 n 是非 0 自然数), 则

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 245, n = 9.$$

于是所求三个连续自然数的和是 $3n = 27$.

56. 长方体侧面积为 $148 - 30 \times 2 = 88(\text{cm}^2)$, 而由底面周长 22cm, 得长方体的高为 $88 \div 22 = 4(\text{cm})$.

又底面积为 30cm^2 ,

所以长方体的体积为 $S_{\text{底}} \times \text{高} = 30 \times 4 = 120(\text{cm}^3)$.

57. 当重叠到 5 层时, 这个图形的上下、左右、前后各有几个小正方形, 共 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15(\text{个})$,

所以这个立方体的表面积是 $15 \times 2 \times 2 \times 6 = 360(\text{平方厘米})$.

58. 因为三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边,
所以三边长只能是 2, 3, 4; 或 2, 4, 5; 或 2, 5, 6; 或 3, 4, 5; 或 3, 4, 6; 或
3, 5, 6; 或 4, 5, 6. 故可组成 7 个不同的三角形.

59. 由 a, b, c 三个数字所组成的三位数共有 6 个,

由题意知 $\overline{abc} + 2874 = 222(a+b+c)$.

又因为 $2874 + 100 < 2874 + \overline{abc} < 2874 + 999$,

所以 $2974 < 222(a+b+c) < 3873$,