

于是 $13 < \frac{2974}{222} < a+b+c < \frac{3873}{222} < 18$.

因为当 $a+b+c=14$ 时, $222 \times 14 - 2874 = 234, 2+3+4 \neq 14$, 不符合题意;

当 $a+b+c=15$ 时, $222 \times 15 - 2874 = 456, 4+5+6 = 15$, 符合题意;

当 $a+b+c=16$ 时, $222 \times 16 - 2874 = 678, 6+7+8 \neq 16$, 舍.

当 $a+b+c=17$ 时, $222 \times 17 - 2874 = 900, 9+0+0 \neq 17$, 舍.

综上, $\overline{abc} = 456$.

60. 因为 $S_1 = \frac{1}{2}a^2, S_2 = \frac{\pi-2}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2, S_3 = \frac{4-\pi}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$,

所以 $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{32}a^6$.

61. 12 点时, 时针与分针均指向 12, 此后, 分针每走 12 小格, 时针就走一小格. 当时针与分针所指的小格数相差 15 (或 45) 时, 时针与分针成 90° . 设经过 x 分钟后, 时针与分针第一次成 90° 角, 则

$$x - \frac{x}{12} = 15, x = 16\frac{4}{11} (\text{分钟}).$$

所以从 12 点开始, 经过 $16\frac{4}{11}$ 分钟时针与分针第一次成 90° 角.

设经过 y 分钟后, 时针与分针第二次成 90° 角, 则

$$y - \frac{y}{12} = 45, y = 49\frac{1}{11} (\text{分钟}).$$

故 12 点后时针与分针第二次成 90° 角时的时刻为 12 点 $49\frac{1}{11}$ 分.

62. 易知从第三个数起, 每个数都是它前面两个数的和,

因此这一列数是: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

因为第 n 个数比第 $n+2$ 个数小 233, 所以第 $n+1$ 个数为 233.

又因为第 13 个数为 233, 所以 $n+1=13, n=12$.

63. 蚂蚁爬一周需要的总时间是

$$240 \div 3 + 240 \div 4 + 240 \div 5 = 188 (\text{s}),$$

而一周的总路程是 $240 \times 3 = 720 (\text{cm})$,

所以蚂蚁的平均速度是 $720 \div (188 + 2 \times 26) = 3 (\text{cm/s})$.

64. 能被 25 整除的四位数中至多含一个奇数数字的末两位只能是 00、25 或 50.

(1) 当末两位是 00 时,

① 千位可能是 2, 4, 6, 8, 百位任意, 共有 $4 \times 10 = 40$ 种情形;

② 千位若是奇数, 则百位只能是偶数, 共有 $5 \times 5 = 25$ 种情形.

(2) 当末两位是 25 时, 前两位只能是偶数, 共有 $4 \times 5 = 20$ 种情形.

(3) 当末两位是 50 时, 前两位只能是偶数, 共有 $4 \times 5 = 20$ 种情形.

故满足题意的数共 $40 + 25 + 20 + 20 = 105$ (个).

65. 易知第 k 列的分子是 k ,

每行中各分数的分子和分母的和相等,

第 m 行各个分数的分子和分母的和都是 $(m+1)$.

所以 $\frac{24}{2013}$ 位于第 2036 行第 24 列.

66. 因为 $2+3+5+7+11+13+17+19+23=100=10 \times 10$, 这是连续 n 个质数和中出现的第一个完全平方数, 所以 n 最小是 9.

67. 由题意, 得

$$\begin{cases} 2b-1=2, \\ a+1=3, \\ b+2=a, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2b-1=a+1, \\ a=2, \\ b+2=3, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2b-1=b+2, \\ a+1=3, \\ a=2, \end{cases}$$

解得

$$a=2, b=3,$$

故这 3 个数的乘积是 $2 \times 3 \times 5 = 30$.

68. 因为 $6657 = 3 \times 7 \times 317 = 21 \times 317$, 所以 $\overline{xyz} = 117$.

69. 易知 $\angle DAE = \angle E = 45^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \angle C = 60^\circ$,

所以 $\angle CAF = 15^\circ$, $\angle AFC = 135^\circ$, $\angle BFE = 135^\circ$.

从而 $\angle BFE$ 的度数是 $\angle CAF$ 的 $135^\circ \div 15^\circ = 9$ (倍).

70. 设长方体的长, 宽, 高分别是 x, y, z , 则相邻的两个面的面积之和可能是 $x(y+z)$, 或 $y(z+x)$, 也可能是 $z(x+y)$, 不妨设为 $x(y+z)$.

因为 $130 = 2 \times 5 \times 13$,

所以由题意“长、宽、高都不超过 13”, 知 $x = 13$.

于是 $y+z=10$, $y=3$, $z=7$ (反过来 $z=3$, $y=7$ 也一样).

所以这个长方体的体积是 $13 \times 3 \times 7 = 273$.

71. 从俯视图看是一个半径为 6 厘米的圆, 面积是

$$\pi \cdot 6^2 = 36\pi (\text{平方厘米}),$$

再看侧面展开图是两个圆柱的侧面展开图的组合图,面积为

$$2\pi \times 6 \times 10 + 2\pi \times 3 \times 5 = 150\pi (\text{平方厘米}).$$

所以这个物体的表面积是 $36\pi \times 2 + 150\pi = 222\pi (\text{平方厘米}).$

72. 由 $2+2+3+5+x=1+1+2+4+y$, 得 $x+4=y$,
因为 $1 \leq x, y \leq 5$, 所以 $y=5, x=1$.

73. 所求时间内时针和分针共走了 60 格,
所以小明在外面的时间是

$$60 \div \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 55 \frac{5}{13} (\text{分钟}).$$

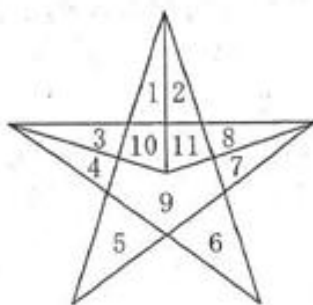


图 23

74. 在图 23 中给各部分标号:

(1) 由一部分组成的三角形: 1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 共 8 个;

(2) 由两部分组成的三角形: $1+2, 1+10, 2+11, 11+8, 8+7, 3+4, 3+10$, 共 7 个;

(3) 由四个部分组成的三角形: $3+10+11+18$, 仅 1 个;

(4) 由六部分组成的三角形: $9+10+11+5+7+8, 9+10+11+3+4+6, 9+10+11+1+2+5$, 共 3 个.

故图中共有三角形 $8+7+1+3=19$ (个).

75. 长方形运动后如图 24, 可以看出红点 A 所走的路程是由图 25 中 3 个圆弧组成:

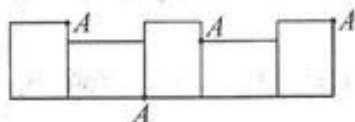


图 24

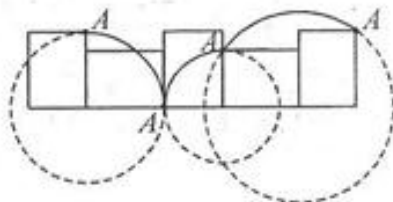


图 25

故
$$\frac{1}{4} \times 2 \times 4\pi + \frac{1}{4} \times 2 \times 3\pi + \frac{1}{4} \times 2 \times 5\pi = 6\pi.$$

76. 先放第一本漫画书, 有 11 种放法 (10 本书之间有 9 个空档, 加上两端共有 11 个位置可放漫画书), 再放第二本漫画书, 有 12 种放法, 故不同的放法共有 $11 \times 12 = 132$ (种).

77. 因为 $385 = 5 \times 7 \times 11$,

$$\text{而 } \frac{385}{5} + \frac{385}{7} + \frac{385}{11} - \frac{385}{5 \times 7} - \frac{385}{7 \times 11} - \frac{385}{11 \times 5} + \frac{385}{5 \times 7 \times 11} = 145,$$

所以与 385 互质的数共有 $385 - 145 = 240$ (个),

即真分数有 240 (个).

而 真分数是成对出现的, 每对之和是 1,

所以分母是 385 的最简真分数之和是 $240 \div 2 = 120$.

78. 设这三批货物的质量分别是 $3x, 4x, 5x$, 单位质量的价格分别是 $6y, 5y, 4y$, 则 $3x \times 6y + 4x \times 5y + 5x \times 4y = 174, xy = 3$,

所以这三批货物的价格分别是

$$3 \times 3 \times 6 = 54 \text{ (万元)}, 3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ (万元)}, 3 \times 5 \times 4 = 60 \text{ (万元)}.$$

79. 因为 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$,

$$1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27, 2013 \div 27 = 74 \cdots 15,$$

共有 74 个循环节, 在 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ 的一个循环节中, 相邻数字之和等于 15 的是 $(1 + 4 + 2 + 8)$, 所以 $N = 74 \times 6 + 4 = 448$.

80. 甲、乙的速度分别是 $120 \div 60 = 2 \text{ (m/s)}$, $180 \div 60 = 3 \text{ (m/s)}$, 现分别计算出甲、乙到达各点的时刻与出发时刻, 如下表:

	A		C		B	
	到达	出发	到达	出发	到达	出发
甲		0 秒	60 秒	65 秒	125 秒	130 秒
乙	40 秒	45 秒	85 秒	90 秒	130 秒	

从上表知第 130 秒时甲从 B 点刚要出发, 乙正好到达 B 点, 所以第 130 秒时, 乙在 B 点追上了甲.

81. 设同时打开进水管与出水管 x 小时才能将水池注满, 则

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1, x = 12.$$

所以水池每小时能漏水 $\frac{1}{12} - \frac{1}{14} = \frac{1}{84}$,

于是只打开进水管注满这个漏的水池需要 $1 \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{84} \right) = \frac{28}{9}$ (小时).

82. 设图书馆到游泳馆的距离是 a 米, 则游泳馆到少年宫的距离

也是 a 米,如图 26:

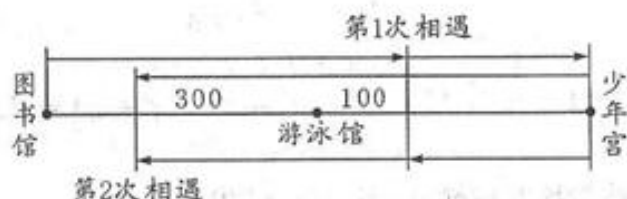


图 26

易知小明所走的 $(3a + 300)$ 米正好是他走 $(a + 100)$ 米的 3 倍, 那么小华所走的 $(a + 300)$ 米也应该是自己走的 $(a - 100)$ 米的 3 倍, 即 $3(a - 100) = a + 300, 2a = 600$, 于是图书馆、少年宫两站之间的距离是 600 米.

83. 设狗跑一步的距离为 1 米, 则马一步的长 $7 \times 1 \div 4 = \frac{7}{4}$ (米),

一个单位时间内, 狗跑 $1 \times 5 = 5$ (米), 马跑 $6 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{2}$ (米),

马追上狗需要 $550 \div \left(\frac{21}{2} - 5 \right) = 100$ (个单位时间),

马追上狗时已经跑了 $100 \times \frac{21}{2} = 1050$ (米),

离超市还有 $2000 - 1050 = 950$ (米).

84. 设满足条件的非零自然数对是 a 和 b ($a \geq b$). 依题意有

$$ab = 10(a + b), a = 10 + \frac{100}{b - 10}.$$

易知 $(b - 10)$ 是 100 的约数.

于是 $b = 11, 12, 14, 15, 20$, 相应地 $a = 110, 60, 35, 30, 20$.

即所求数对还有 $11, 110; 14, 35; 15, 30; 20, 20$; 共四对.

85. 如图 27, 用三个圆分别代表明明、亮亮、军军三人各自做出的题目, 其中 a 表示基础题, b, c, d 都表示中等题, e, f 和 g 都表示难题, 由题意, 得

$$a + b + c + d + e + f + g = 100, \quad ①$$

$$a + b + c + e = 60, \quad ②$$

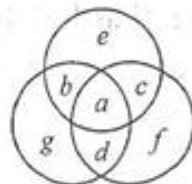


图 27

$$a+c+d+f=60, \quad ③$$

$$a+b+d+g=60. \quad ④$$

$$① \times 2, \text{得 } 2(a+b+c+d+e+f+g)=200, \quad ⑤$$

$$②+③+④, \text{得 } 3a+2(b+c+d)+(e+f+g)=180, \quad ⑥$$

$$⑤-⑥, \text{得 } (e+f+g)-a=20.$$

这说明难题数量比基础题多,多 $200-180=20$ (道).

86. 设 A, B 间的距离是 s 千米, 则

$$\frac{s}{18+\frac{s}{24}} : \frac{s}{18-\frac{s}{24}} = \frac{3}{5}, s=108.$$

87. 因为 $AC \parallel DE$, 所以 $S_{\triangle APE} = S_{\triangle CPD}$.

$$\text{又 } \frac{PC}{CE} = \frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle CDE}}, \frac{PE}{CE} = \frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle EAC}}, \text{所以 } \frac{PC}{PE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}}.$$

因为 $\triangle EAC$ 在边 AC 上的高和 $\triangle CDE$ 在边 DE 上的高相等, 所以

$$\frac{PC}{PE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{1}{2}, PC = \frac{1}{3}CE,$$

$$\text{同理可得 } \frac{CQ}{AQ} = 2, CQ = \frac{2}{3}AC, \text{故 } \frac{CQ}{CP} = \frac{2AC}{CE} = 1.$$

88. 易知小明给小林 a 张邮票后, 小明的邮票是两人总数的 $\frac{13}{32}$; 而小林给小明 a 张邮票后, 小林的邮票是两人总数的 $\frac{11}{28}$,

所以邮票总数应是 32 和 28 的公倍数, 而 $[32, 28] = 224$,

又因为共有 400 多张邮票, 所以两人共有邮票 $224 \times 2 = 448$ (张).

$$\text{因为小明给小林邮票后, 小明有 } 448 \times \frac{13}{32} = 182 \text{ (张),}$$

$$\text{小林有邮票 } 448 - 182 = 266 \text{ (张);}$$

$$\text{小林给小明邮票后, 小林有邮票 } 448 \times \frac{11}{28} = 176 \text{ (张),}$$

$$\text{所以 } a = (266 - 176) \div 2 = 45 \text{ (张).}$$

$$\text{故 小明原有邮票 } 182 + 45 = 227 \text{ (张),}$$

$$\text{小林原有邮票 } 176 + 45 = 221 \text{ (张).}$$

$$89. \text{砂子的总体积是 } \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 20 + \pi \times 12^2 \times 5 = 1680\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

圆柱的底面积是 $\pi \times 12^2 = 144\pi(\text{cm}^2)$,

所以将容器倒立后,砂子的高度是 $1680\pi \div (\pi \times 12^2) = \frac{35}{3}(\text{cm})$.

90. 密文“gwdm”对应的数字是“6, 22, 3, 12”,

设明文“A, B, C, D”对应的数字是“ x_1, x_2, x_3, x_4 ”, 则

$$x_1 + 10 \equiv 6(\text{mod } 26), x_2 + 10 \equiv 22(\text{mod } 26),$$

$$x_3 + 10 \equiv 3(\text{mod } 26), x_4 + 10 \equiv 12(\text{mod } 26),$$

解得 $x_1 = 22, x_2 = 12, x_3 = 19, x_4 = 2$.

而数字 22, 12, 19, 2 所对应的字母为 w, m, t, c, 所以明文为“wmtc”.

91. 如图 28, 从 A 洞开始按顺时针方向编号:

A B C D E
1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ..., 17, 18, ..., 25, 26, 27, ..., 32

从 A 洞(1号)开始插旗, 按顺时针每隔 5 个

洞插一面旗帜, 被插旗的洞的号码依次是: 1, 32, 27, 22, 17, 12, 7, 2, 27, 22, 17, 12, 7, 2,

27. 在第 27 号洞之后, 又到了 A(1 号) 洞, 进入

循环, 还有 16 个洞插不上旗帜, 故 $n = 16$.

92. 设甲每天修桌凳 x 套, 则

$$\frac{960}{x} - 20 = \frac{960}{x+8}, x = 16.$$

图 28

所以, 甲每天修理桌凳 16 套, 乙每天修理 $16 + 8 = 24$ 套.

若甲单独修理, 需 $960 \div 16 = 60(\text{天})$,

总费用为 $60 \times 80 + 60 \times 100 = 10800(\text{元})$;

若乙单独修理, 需 $960 \div 24 = 40(\text{天})$,

总费用为 $40 \times 120 + 40 \times 100 = 8800(\text{元})$;

若甲、乙合作, 需 $960 \div (24 + 16) = 24(\text{天})$,

总费用为 $(80 + 120) \times 24 + 24 \times 100 = 7200(\text{元})$.

所以, 第 ③ 种方案既省时又省钱.

93. 由 $v_Z : v_{\text{甲}} = \frac{1}{160} : \frac{1}{200} = 5 : 4$,

$$v_Z : v_{\text{丙}} = \frac{1}{320} : \frac{1}{300} = 15 : 16,$$

知

$$v_{\text{甲}} : v_{\text{乙}} : v_{\text{丙}} = 12 : 15 : 16.$$

设甲,乙,丙的速度每分钟行 12,15,16 个长度单位. 则甲比乙先出发 10 分钟,乙追上甲需 $12 \times 10 \div (15 - 12) = 40$ (分钟),
同理丙追上甲需 $12 \times 20 \div (16 - 12) = 60$ (分钟),
故乙追上甲之后过 $60 - 40 = 20$ 分钟丙能追上甲.

94. 列表如下:

	北京	广州	上海	软件设计	服装设计	城市规划
甲	×	√		√		×
乙	×	×	√	×	×	√
丙	√				√	×

故甲在广州学软件设计,乙在上海学城市规划,丙在北京学服装设计.

95. 设 $AG = x, AF = mx$, 则

因为 长方形 $ABCD$ 与 $ABEF$ 的长与宽的比相同,

$$\text{所以 } AB = \frac{AF^2}{AG} = \frac{mx \cdot mx}{x} = m^2 x,$$

$$\text{同理, 由 } \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AF} \text{ 得 } BC = \frac{AB^2}{AF} = \frac{m^2 x \cdot m^2 x}{mx} = m^3 x.$$

$$\text{于是 } \frac{m^3 x \cdot m^2 x}{mx \cdot x} = \frac{81}{16}, m^4 = \frac{81}{16}, m = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } BE = AF = mx = \frac{3}{2}x, BG = AB - AG = m^2 x - x = \frac{5}{4}x.$$

$$\text{于是长方形 } BEHG \text{ 的周长是 } 2(BE + BG) = 2\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}x\right) = \frac{11}{2}x.$$

$$\text{由已知, } \frac{11}{2}x = 22, \text{ 得 } x = 4,$$

$$\text{所以 } AF = 6, EF = 9, EC = \frac{15}{2},$$

$$\text{故长方形 } ECDF \text{ 的面积是 } EF \cdot EC = 9 \times \frac{15}{2} = \frac{135}{2}.$$

96. 除 2 以外,所有质数都是奇数,其平方也是奇数,从而任意两个的差与平方和都是偶数,都不是质数,因此若存在满足题意的两个质数,其中必有一个是 2,由下表:

a	3	5	7	11	13	17	19	23	29
$a-2$	1	3	5	9	11	15	17	21	27
a^2	9	25	49	121	169	289	361	529	841
a^2+4	13	29	53	125	173	193	365	533	845

可知存在满足题意的两个质数,共有三组:2与5,2与7,2与13.

97. 设丙容器中物质A和物质C的质量比是 $m:n$,设从甲容器中取出的物质总质量为 xg ,则

$$\left(\frac{2}{5}x + \frac{m}{m+n} \times 3x\right) : \left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \times 2x\right) : \left(\frac{2}{3} \times 2x + \frac{n}{m+n} \times 3x\right) \\ = 183 : 152 : 385,$$

$$\text{即 } \frac{17m+2n}{5(m+n)} : \frac{19}{15} : \frac{4m+13n}{3(m+n)} = 183 : 152 : 385,$$

$$\text{于是 } \frac{17m+2n}{5(m+n)} : \frac{4m+13n}{3(m+n)} = 183 : 385, m:n = 3:5.$$

故丙容器内物质A和物质C的质量比是3:5.

98. 设小刚晋级到第 n 级游戏有 a_n 种方法,下面开始讨论:

如果只有1级游戏,那么小刚无法晋级, $a_1 = 0$;

如果只有2级游戏,那么小刚只有1种方法, $a_2 = 1$;

如果只有3级游戏,那么小刚也只有1种方法, $a_3 = 1$;

如果有4级游戏,那么小刚要么从第1级晋级上去,要么从第2级晋级上去,应有 $0+1=1$ (种)方法, $a_4 = a_1 + a_2 = 1$;

如果有5级游戏,那么小刚要么从第2级晋级去,要么从第3级晋级去,应有 $1+1=2$ (种)方法, $a_5 = a_2 + a_3 = 2$;

依此类推,每一级的方法数都应等于它前面3级和前面2级的方法数之和.即

$$a_n = a_{n-3} + a_{n-2} (n > 3),$$

于是 $a_6 = a_3 + a_4 = 2; a_7 = a_4 + a_5 = 3; a_8 = a_5 + a_6 = 4;$

$$a_9 = a_6 + a_7 = 5; a_{10} = a_7 + a_8 = 7; a_{11} = a_8 + a_9 = 9;$$

$$a_{12} = a_9 + a_{10} = 12; a_{13} = a_{10} + a_{11} = 16; a_{14} = a_{11} + a_{12} = 21;$$

$$a_{15} = a_{12} + a_{13} = 28; a_{16} = a_{13} + a_{14} = 37; a_{17} = a_{14} + a_{15} = 49;$$

$$a_{18} = a_{15} + a_{16} = 65; a_{19} = a_{16} + a_{17} = 86; a_{20} = a_{17} + a_{18} = 114;$$

所以晋级20级游戏共有114种不同的方法.

99. 居民用水的水费是

$$20(2.8 + 0.9) + (23 - 20)(4.2 + 1.8) = 92,$$

$$\text{餐饮用水是 } 40(4.6 + 1.5) + (102 - 40)(6.9 + 3) = 857.8,$$

于是这个月他应该交的水费是 $92 + 857.8 = 949.8$ (元).

100. 设牙膏, 沐浴露, 洗发露的单价分别是整数 x, y, z , 则

$$x + y + z = 100, y > 2x, 2z > 7y, 8x > z.$$

由 $y > 2x$, 得 $y > 2x, x < \frac{y}{2};$

由 $2z > 7y$, 得 $z > \frac{7}{2}y, y < \frac{2}{7}z;$

由 $8x > z$, 得 $x > \frac{z}{8}, z < 8x.$

因为 $y < \frac{2}{7}z < \frac{2}{7} \times 8x = \frac{16}{7}x,$

所以 $x + y + z = 100 < x + \frac{16}{7}x + 8x = \frac{79}{7}x,$

从而 $x > 100 \times \frac{7}{79} = 8.86\cdots,$

又因为 $z > \frac{7}{2}y > \frac{7}{2} \times 2x = 7x,$

所以 $x + y + z = 100 > x + 2x + 7x = 10x, x < \frac{100}{10} = 10.$

而 x 是整数, 所以 $x = 9.$

因为 $z < 8x < 8 \times \frac{1}{2}y = 4y,$

所以 $x + y + z = 100 > \frac{1}{2}y + 2y + 4y = \frac{11}{2}y,$

于是 $y > 100 \times \frac{2}{11} = 18.18\cdots.$

又因为 $x > \frac{z}{8} > \frac{1}{8} \times \frac{7}{2}y = \frac{7}{16}y,$

所以 $x + y + z = 100 > \frac{7}{16}y + y + \frac{7}{2}y = \frac{79}{16}y,$

于是 $y < 100 \times \frac{16}{79} = 20.25.$

而 y 是整数, 所以 $y = 19$ 或 $20.$

如果 $y = 19, x = 9$, 那么 $z = 72$. 而 $8x = 72$ 不能满足 $8x > z = 72$, 矛盾, 于是 $y = 20$, 从而 $z = 71, x = 9.$

故牙膏、沐浴露、洗发露的单价分别是 9 元, 20 元, 71 元.