北京市四中 2011-2012 学年上学期高二年级期末测验数学试卷（文科）

（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）

卷（I）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分

1. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为

A. （1，0）　　B. （0，1）　　C. （2，0）　　D. （0，2）

2. 若 a，b 为异面直线，直线 $c \parallel a$，则 c 与 b 的位置关系是

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 异面或相交

3. 设条件甲为“$0<x<5$”，条件乙为“$|x-2|<3$”，则甲是乙的

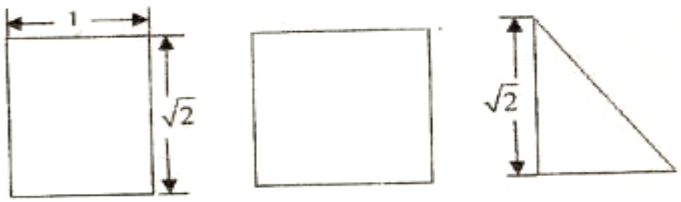
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的离心率为 2，则 a 等于

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

5. 若某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是



主视图　　左视图　　俯视图

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 已知△ABC 的顶点 B，C 均在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆的另一个焦点在 BC 边上，则△ABC 的周长是

A. $2\sqrt{3}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

7. 过点（2，4），与抛物线 $y^2=8x$ 有且仅有一个公共点的直线有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

8. 双曲线 $8kx^2-ky^2=8$ 的一个焦点是（0，3），那么 k 的值是

A. -1　　B. 1　　C. $-\frac{\sqrt{65}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{65}}{3}$

9. 已知直线 l，m，n 和平面 α，β，在下列命题中真命题是

A. 若 α 内有无数多条直线垂直于 β 内的一条直线，则 $\alpha\perp\beta$

B. 若 α 内有不共线的三点到 β 的距离相等，则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 l，m 是两条相交直线，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\alpha$，且 $n\perp l$，$n\perp m$，则 $n\perp\alpha$

D. 若 $l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则 $l\parallel m$

10. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线交抛物线于 A、B 两点，若线段 AB 的长为 8，则 p 的值是

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{8}{5}$　　D. $\frac{16}{9}$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点，若点 P 到直线 BC 的距离与点 P 到直线 C_1D_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹所在的曲线是

A. 直线　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

12. 直线 $y=kx-2k-1$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ 有公共点，则 k 的取值范围是

A. $(-\infty,-\frac{1}{4}]\cup(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,-\frac{1}{4}]$

C. $[-\frac{1}{4},+\infty)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分

13. 一个圆柱的侧面展开图是一个边长为 1 的正方形，则该圆柱的体积是_____。

14. 已知椭圆中心在原点，一个焦点为 F（$-2\sqrt{3}$，0），且长轴长是短轴长的 2 倍，则该椭圆的标准方程是_____。

15. 已知 OA 为球 O 的半径，过 OA 的中点 M 且垂直于 OA 的平面截球面得到圆 M，若圆 M 的面积为3π，则球 O 的表面积等于_____。

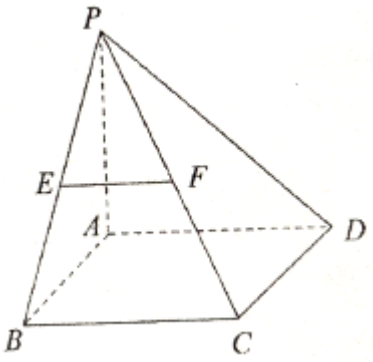
16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为_____，直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 C 的公共点个数是_____。

三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分

17. 如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是矩形，PA⊥平面 ABCD，AP＝AB，BP＝BC＝2，E，F 分别是 PB，PC 的中点。

（1）证明：EF∥平面 PAD；

（2）求三棱锥 E－ABC 的体积 V。



18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F_2（3，0），离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（1）求椭圆的方程。

（2）设直线 $y=kx$ 与椭圆相交于 A，B 两点，M，N 分别为线段 AF_2，BF_2 的中点，若坐标原点 O 在以 MN 为直径的圆上，求 k 的值。

卷（II）

一、选择题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

1. 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，则点 P 到点（0，2）的距离与点 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{9}{2}$

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一球面上，且 AB=2，AD=$\sqrt{3}$，$AA_1=1$，则顶点 A，B 间的球面距离是

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

3. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 8

二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

4. 若正四面体的棱长为 a，则其体积是_____。

5. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为_____。

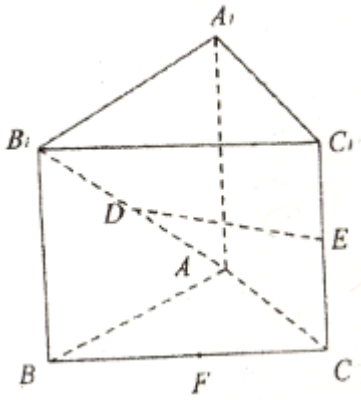
6. 自半径为 R 的球面上一点 P 引球的两两垂直的弦 PA、PB、PC，则 $PA^2+PB^2+PC^2=$_____。

三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分

7. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB⊥AC，AB＝AC＝ AA_1，D，E，F 分别为 AB_1，CC_1，BC 的中点。

（1）求证：DE∥平面 ABC；

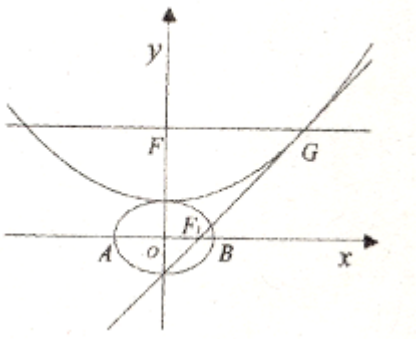
（2）求证：B_1F ⊥平面 AEF。



8. 设 $b>0$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$，如图所示，过点 F（0，$b+2$）作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G，已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1。

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设 A，B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P，使得△ABP 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）。



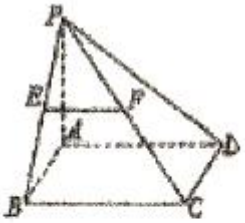
【试题答案】

卷（I）

1~12 CDADB　　CBACA　　DB

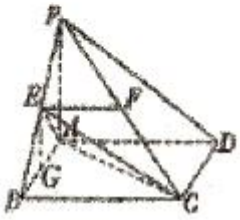
13. $\frac{1}{4\pi}$　　14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　15. 16π　　16. $\left[2,\ 2\sqrt{2}\right)$；0

17. 解：（1）在△PBC 中，E，F 分别是 PB，PC 的中点，∴EF∥BC，又 BC∥AD，∴EF∥AD，∴EF∥平面 PAD。



（2）连接 AE，AC，EC，过 E 作 EG∥PA 交 AB 于点 G，

则 BG⊥平面 ABCD，且 $EG=\frac{1}{2}PA$。



在△PAB 中，AD＝AB，BP＝2，

∴AP＝AB＝$\sqrt{2}$，EG＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$，

$\therefore V_{E-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot EG=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}$。

18. 解：（1）由题意得 $\begin{cases}c=3\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，得 $a=2\sqrt{3}$。

结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=12$，$b^2=3$。

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$。

（2）由 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx\end{cases}$，得 $\left(3+12k^2\right)x^2-12\times 3=0$。

设 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=0,\ x_1x_2=\dfrac{-12\times3}{3+12k^2}$，

依题意，OM⊥ON，

易知，四边形 OMF_2N 为平行四边形，所以 $AF_2\perp BF_2$，

因为 $\overrightarrow{F_2A}=(x_1-3,\ y_1),\overrightarrow{F_2B}=(x_2-3,\ y_2)$，

所以 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+9=0$。

即 $\dfrac{-12\times3(1+k^2)}{3+12k^2}+9=0$，

解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

卷（II）

1~3 ACB

4. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$；　　5. $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　6. $4R^2$

7. （1）取 AA_1 的中点 G，则 DG∥AB，EG∥AC，所以平面 GDE∥平面 ABC，所以 DG∥平面 ABC。

（2）连结 AF，则 AF⊥平面 BCC_1B_1。

$B_1F\perp AF$，$B_1F\perp EF$，所以 B_1F ⊥ 平面 AEF。

8. 解：（1）由 $x^2=8(y-b)$ 得 $y=\dfrac{1}{8}x^2+b$，

当 $y=b+2$ 得 $x=\pm4$，∴G 点的坐标为（4，$b+2$），

法一：$GF_1:y=\dfrac{b+2}{4-b}(x-b)$，与抛物线联立，

△=0，解得 $b=1$；

法二：由椭圆方程得 F_1 点的坐标为（b，0），

根据抛物线光学性质，$\therefore 4-b=b+2$ 即 $b=1$，即椭圆和抛物线的方程分别为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 和 $x^2=8(y-1)$；

（2）∵过 A 作 x 轴的垂线与抛物线只有一个交点 P，

∴以∠PAB 为直角的 Rt△ABP 只有一个，

同理，以∠PBA 为直角的 Rt△ABP 只有一个。

若以∠APB 为直角，设 P 点坐标为（x, y），A、B 两点的坐标分别为 $(-\sqrt{2},\ 0)$ 和（$\sqrt{2}$，0），

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2+y^2=y^2+8y-10=0$，

关于 y 的二次方程有一大于等于 1 的解，∴ x 有两解，

即以∠APB 为直角的 Rt△ABP 有两个，

因此抛物线上存在四个点使得△ABP 为直角三角形。