北京市西城区 2011 — 2012 学年度第一学期期末试卷

高三数学（文科）

2012.1

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．复数 $\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})=$（　　）

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$1-\mathrm{i}$　　（C）$-1+\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

2．若向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，则与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线的向量可以是（　　）

（A）$(\sqrt{3},-1)$　　（B）$(-1,-\sqrt{3})$　　（C）$(-\sqrt{3},-1)$　　（D）$(-1,\sqrt{3})$

3. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是（　　）

（A）$y=-\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=\mathrm{e}^{|x|}$

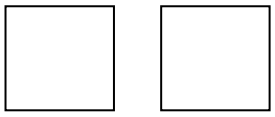
（C）$y=-x^2+3$　　（D）$y=\cos x$

4．“直线 l 的方程为 $x-y=0$”是“直线 l 平分圆 $x^2+y^2=1$ 的周长”的（　　）

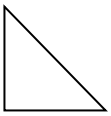
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

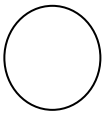
（C）充要条件　　（D）既不充分又不必要条件

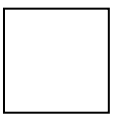
5．一个几何体的主视图和左视图如图所示，则这个几何体的俯视图不可能是（　　）

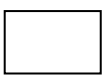


主视图　　左视图

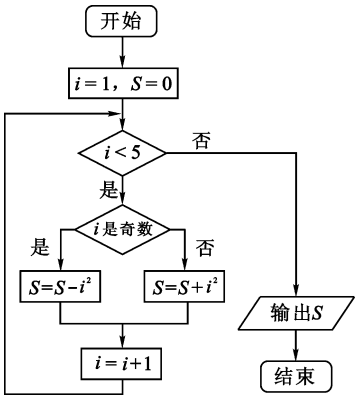
（A）

（B）

（C）

（D）

6．执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）



（A）3

（B）-6

（C）10

（D）-15

7．已知 $a>b>0$，给出下列四个不等式：

① $a^2>b^2$；　② $2^a>2^{b-1}$；　③ $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$；　④ $a^3+b^3>2a^2b$.

其中一定成立的不等式为（　　）

（A）①、②、③　　（B）①、②、④

（C）①、③、④　　（D）②、③、④

8．有限集合 P 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(P)$. 已知 $\mathrm{card}(M)=10$，$A\subseteq M$，$B\subseteq M$，$A\cap B=\varnothing$，且 $\mathrm{card}(A)=2$，$\mathrm{card}(B)=3$. 若集合 X 满足 $X\subseteq M$，且 $A\not\subset X$，$B\not\subset X$，则集合 X 的个数是（　　）

（A）672　　（B）640　　（C）384　　（D）352

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是_____.

10．双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的一个焦点到其渐近线的距离是_____.

11．若曲线 $y=x^3+ax$ 在原点处的切线方程是 $2x-y=0$，则实数 $a=$_____.

12．在△ ABC 中，三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $b=\sqrt{5}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\tan C=2$，则 $c=$_____.

13．已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，若 $a_3-a_1=6$，则 $a_1=$_____；

$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=$_____.

14．设 $\lambda>0$，不等式组 $\begin{cases}x\le 2,\\ \lambda x-y\ge 0,\\ x+2\lambda y\ge 0\end{cases}$ 所表示的平面区域是 W．给出下列三个结论：

① 当 $\lambda=1$ 时，W 的面积为 3；

② $\exists\lambda>0$，使 W 是直角三角形区域；

③ 设点 $P(x,y)$，对于 $\forall P\in W$ 有 $x+\frac{y}{\lambda}\le 4$．

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$，$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16.（本小题满分 13 分）

某种零件按质量标准分为$1,2,3,4,5$五个等级. 现从一批该零件中随机抽取20个，对其等级进行统计分析，得到频率分布表如下：

等级	1	2	3	4	5
频率	0.05	m	0.15	0.35	n

（Ⅰ）在抽取的20个零件中，等级为5的恰有2个，求m,n；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，从等级为3和5的所有零件中，任意抽取2个，求抽取的2个零件等级恰好相同的概率.

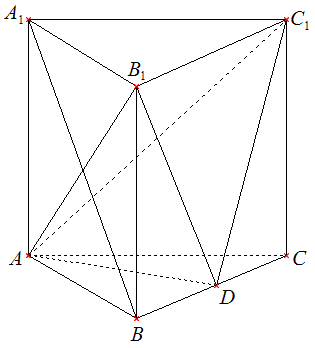
17.（本小题满分 14 分）

如图，正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长和底面边长均为2，D是BC的中点.

（Ⅰ）求证：AD⊥平面B_1BCC_1；

（Ⅱ）求证：A_1B∥平面ADC_1；

（Ⅲ）求三棱锥C_1-ADB_1的体积.



18.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若$f(x)$在$(0,1]$上的最大值是-1，求a的值.

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的一个焦点是$F(1,0)$，且离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设经过点F的直线交椭圆C于M,N两点，线段MN的垂直平分线交y轴于点

$P(0, y_0)$，求 y_0 的取值范围.

20.（本小题满分 13 分）

已知数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n$. 如果数列 $B_n: b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $b_1 = a_n$， $b_k = a_{k-1} + a_k - b_{k-1}$，

其中 $k = 2, 3, \cdots, n$，则称 B_n 为 A_n 的“衍生数列”.

（Ⅰ）写出数列 $A_4: 2, 1, 4, 5$ 的“衍生数列” B_4；

（Ⅱ）若 n 为偶数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n，证明：$b_n = a_1$；

（Ⅲ）若 n 为奇数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n， B_n 的“衍生数列”是 C_n，….依次将数列 A_n， B_n， C_n，…的首项取出，构成数列 $\Omega: a_1, b_1, c_1, \cdots$.

证明：Ω 是等差数列.

北京市西城区 2011 — 2012 学年度第一学期期末

高三数学（文科）参考答案及评分标准

2012.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. C； 2. D； 3. B； 4. A； 5. D； 6. C ； 7. A； 8. A .

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\{x \mid x \geq 1\}$； 10. 3； 11. 2；

12. $2\sqrt{2}$； 13. 2， $\frac{1}{3}(1-4^{-n})$； 14. ①、③.

注：13 题第一问 2 分，第二问 3 分；14 题多选、少选、错选均不给分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解： $f(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}\sin^2\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ……4 分

（Ⅱ）解：$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……8 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$. ……9 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$；……11 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……13 分

16.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：由频率分布表得 $0.05+m+0.15+0.35+n=1$，

即 $m+n=0.45$. ……2 分

由抽取的 20 个零件中，等级为 5 的恰有 2 个，

得 $n=\frac{2}{20}=0.1$. ……4 分

所以 $m=0.45-0.1=0.35$. ……5 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得，等级为 3 的零件有 3 个，记作 x_1,x_2,x_3；等级为 5 的零件有 2 个，

记作 y_1,y_2.

从 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 中任意抽取 2 个零件，所有可能的结果为：

$(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,x_3),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(y_1,y_2)$

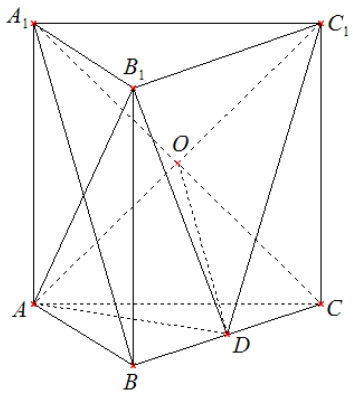
共计 10 种. ……9 分

记事件 A 为“从零件 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 中任取 2 件，其等级相等”.

则 A 包含的基本事件为 $(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3),(y_1,y_2)$ 共 4 个. ……11 分

故所求概率为 $P(A)=\frac{4}{10}=0.4$. ……13 分

17.（本小题满分 14 分）



（Ⅰ）证明：因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，

所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.

又 $AD\subset$ 平面 ABC，

所以 $CC_1\perp AD$. ……3 分

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，D 是 BC 的中点，

所以 $BC \perp AD$，　　……4 分

所以 $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1.　　……5 分

（Ⅱ）证明：连结 A_1C，交 AC_1 于点 O，连结 OD.

由 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，

得 四边形 ACC_1A_1 为矩形，O 为 A_1C 的中点.

又 D 为 BC 中点，所以 OD 为 $\triangle A_1BC$ 中位线，

所以 $A_1B \parallel OD$，　　……8 分

因为 $OD \subset$ 平面 ADC_1，$A_1B \not\subset$ 平面 ADC_1，

所以 $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1.　　……10 分

（Ⅲ）解：因为 $V_{C_1-ADB_1}=V_{A-B_1DC_1}$，　　……12 分

所以 $V_{C_1-ADB_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta B_1DC_1}\cdot AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　　……14 分

18.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：$f'(x)=\frac{ax^2+1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.　　……3 分

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$，从而函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.　　……4 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{-\frac{1}{a}}$，舍去 $x=-\sqrt{-\frac{1}{a}}$.　　……5 分

此时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(0,\sqrt{-\frac{1}{a}})$	$\sqrt{-\frac{1}{a}}$	$(\sqrt{-\frac{1}{a}},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(\sqrt{-\frac{1}{a}})$	↘

所以，$f(x)$ 的单调增区间是 $(0,\sqrt{-\frac{1}{a}})$；单调减区间是 $(\sqrt{-\frac{1}{a}},+\infty)$.　　……7 分

（Ⅱ）① 当 $a\geq 0$ 时，由（Ⅰ）得函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{a}{2}$.

令 $\frac{a}{2}=-1$，得 $a=-2$，这与 $a\geq 0$ 矛盾，舍去 $a=-2$.　　……9 分

② 当 $-1\leq a<0$ 时，$\sqrt{-\frac{1}{a}}\geq 1$，由（Ⅰ）得函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{a}{2}$.

令 $\frac{a}{2}=-1$，得 $a=-2$，这与 $-1\leq a<0$ 矛盾，舍去 $a=-2$.　　……10 分

③ 当 $a<-1$ 时，$0<\sqrt{-\frac{1}{a}}<1$，由（Ⅰ）得函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $f(\sqrt{-\frac{1}{a}})$.

令 $f(\sqrt{-\frac{1}{a}})=-1$，解得 $a=-\mathrm{e}$，适合 $a<-1$. ……12 分

综上，当 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值是 -1 时，$a=-\mathrm{e}$. ……13 分

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：设椭圆 C 的半焦距是 c. 依题意，得 $c=1$. ……1 分

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，

所以 $a=2c=2$，$b^2=a^2-c^2=3$. ……3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）解：当 $MN\perp x$ 轴时，显然 $y_0=0$. ……5 分

当 MN 与 x 轴不垂直时，可设直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$.

……7 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，线段 MN 的中点为 $Q(x_3,y_3)$.

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$. ……8 分

所以 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，$y_3=k(x_3-1)=\frac{-3k}{3+4k^2}$.

线段 MN 的垂直平分线方程为 $y+\frac{3k}{3+4k^2}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4k^2}{3+4k^2})$.

在上述方程中令 $x=0$，得 $y_0=\frac{k}{3+4k^2}=\frac{1}{\frac{3}{k}+4k}$. ……10 分

当 $k<0$ 时，$\frac{3}{k}+4k\leq -4\sqrt{3}$；当 $k>0$ 时，$\frac{3}{k}+4k\geq 4\sqrt{3}$.

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{12}\leq y_0<0$，或 $0<y_0\leq\frac{\sqrt{3}}{12}$. ……12 分

综上，y_0 的取值范围是 $[-\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{3}}{12}]$. ……13 分

20.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：$B_4:5,-2,7,2$.　　……3 分

（Ⅱ）证明：　因为 $b_1=a_n$，

$b_1+b_2=a_1+a_2$，

$b_2+b_3=a_2+a_3$，

……

$b_{n-1}+b_n=a_{n-1}+a_n$，

由于 n 为偶数，将上述 n 个等式中的第 $2,4,6,\cdots,n$ 这 $\frac{n}{2}$ 个式子都乘以 -1，相加得

$b_1-(b_1+b_2)+(b_2+b_3)-\cdots-(b_{n-1}+b_n)=a_n-(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-\cdots-(a_{n-1}+a_n)$　　即 $-b_n=-a_1$，

$b_n=a_1$.　　……8 分

（Ⅲ）证明：对于数列 A_n 及其“衍生数列” B_n，

因为 $b_1=a_n$，

$b_1+b_2=a_1+a_2$，

$b_2+b_3=a_2+a_3$，

……

$b_{n-1}+b_n=a_{n-1}+a_n$，

由于 n 为奇数，将上述 n 个等式中的第 $2,4,6,\cdots,n-1$ 这 $\frac{n-1}{2}$ 个式子都乘以 -1，

相加得

$b_1-(b_1+b_2)+(b_2+b_3)-\cdots+(b_{n-1}+b_n)=a_n-(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-\cdots+(a_{n-1}+a_n)$　　即

$b_n=a_n-a_1+a_n=2a_n-a_1$.

设数列 B_n 的“衍生数列”为 C_n，

因为 $b_1=a_n$，$c_1=b_n=2a_n-a_1$，

所以 $2b_1=a_1+c_1$，　即 a_1,b_1,c_1 成等差数列.　　……12 分

同理可证，$b_1,c_1,d_1;c_1,d_1,e_1,\cdots$ 也成等差数列.

从而 Ω 是等差数列.　　……13 分

北京市通州区2012届高三上学期期末摸底考试

数学（文科）试卷

2012年1月

本试卷分第I卷和第II卷两部分，第I卷第1至2页，第II卷2至4页，共150分．考试时间长120分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试题卷上作答无效．考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷 （选择题 共40分）

一、本大题共8个小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．把正确答案选项的标号填涂在答题卡上.

1．已知集合$A=\{x|x-1<0\}$，$B=\{x|0\leqslant x<2\}$，那么$A\cap B$等于

A．$\{x|x<-1\}$　　B．$\{x|x>2\}$

C．$\{x|0\leqslant x<1\}$　　D．$\{x|1<x<2\}$

2．复数$\dfrac{1-i}{1+i}$等于

A．-1　　B．$-i$　　C．1　　D．i

3．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，且$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，那么$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$等于

A．$(4,0)$　　B．$(0,4)$　　C．$(4,-8)$　　D．$(-4,8)$

4．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1+a_2=1$，$a_5=11$，那么数列$\{a_n\}$的前5项的和S_5等于

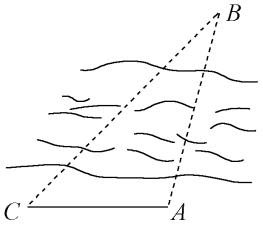
A．22　　B．25　　C．30　　D．35

5．已知$a,b\in\mathbf{R}$，那么“$\log_{\frac{1}{2}}a>\log_{\frac{1}{2}}b$”是“$a<b$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．如右图，设A，B两点在河的两岸，一测量者在A的同侧，在所在的河岸边选定一点C，测出AC的距离为$50m$，$\angle ACB=45°$，$\angle CAB=105°$后，就可以计算出A，B两点的距离为（其中$\sqrt{2}=1.41$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$，精确到0.1）



A．$70.7m$　　B．$78.7m$

C．$86.6m$　　D．$90.6m$

7．过圆$(x-1)^2+(y+2)^2=5$上一点$M(3,-1)$的切线方程是

A．$2x+y-7=0$　　B．$2x+y-5=0$　　C．$x+2y-1=0$　　D．$x-2y-5=0$

8．当$x\in(3,4)$时，不等式$\log_a(x-2)+(x-3)^2<0$恒成立，则实数a的取值范围是

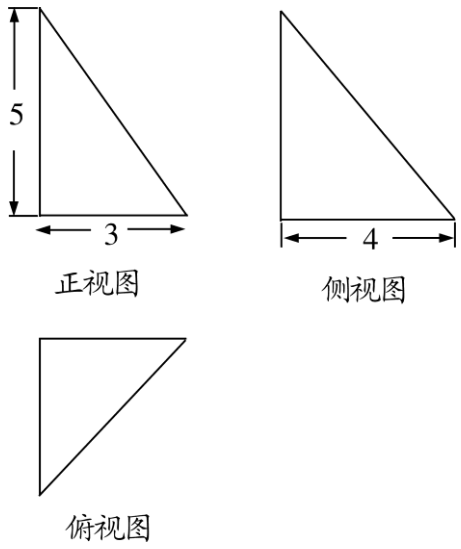
A．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　C．$(1,2]$　　D．$[2,+\infty)$

第Ⅱ卷 （非选择题 共110分）

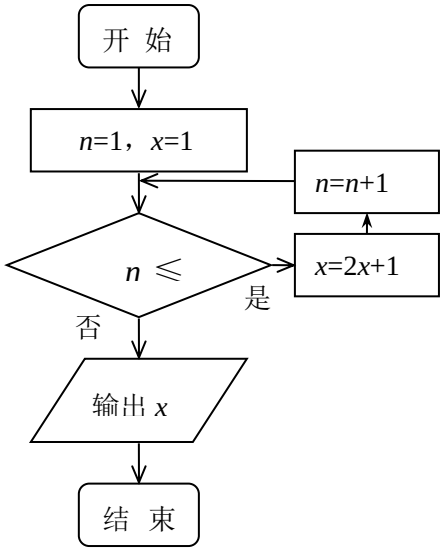
二、填空题：本大题共6个小题，每小题5分，共30分. 把答案填在答题卡相应的位置上.

9．观察下列式子：$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$，…，根据以上式子可以猜想：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}<$_____.

10．如图，已知图中的三个直角三角形是一个几何体的三视图，那么这个几何体的体积等于_____.



（第10题图）



（第11题图）

11．某程序框图如图所示，该程序运行后，输出的x值是_____.

12．已知不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 3,\\ x-y\geqslant -1,\\ x-3\leqslant 0,\end{cases}$ 那么$z=x+2y$的最小值是_____.

13．已知双曲线的一个焦点与抛物线$x=-\frac{1}{8}y^2$的焦点相同，且双曲线的离心率是2，那么双曲线的渐近线方程是_____.

14．下面四个命题：

①已知函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x},x<0,\end{cases}$且$f(a)+f(4)=4$，那么$a=-4$；

②一组数据18，21，19，a，22的平均数是20，那么这组数据的方差是2；

③要得到函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，只要将$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$单位；

④已知奇函数$f(x)$在$(0,+\infty)$为增函数，且$f(-1)=0$，则不等式$f(x)<0$的解集$\{x|x<-1\}$.

其中正确的是_____.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分.解答题写出文字说明,演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1$.

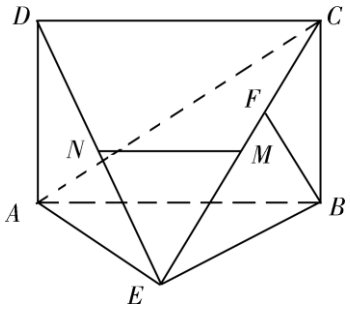
（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16.（本小题共 13 分）如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，BC ⊥ 平面 ABE，F 是 CE 上一点，BF ⊥ 平面 ACE，点 M，N 分别是 CE，DE 的中点.

（Ⅰ）求证：MN // 平面 ABE；

（Ⅱ）求证：$AE\perp BE$.



17.（本小题共 13 分）已知甲袋中有 1 只白球，2 只红球；乙袋中有 2 只白球，2 只红球，现从两袋中各取一球.

（Ⅰ）两球颜色相同的概率；

（Ⅱ）至少有一个白球的概率.

18.（本小题共 13 分）已知函数 $f(x)=ax-\ln x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 平行，求 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

19.（本小题共 14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$，$a_2=2$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $2S_n=n(3a_1+a_n)$，$n\in N^*$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）若 $b_n=\begin{cases}2 & (n=1),\\ \dfrac{8}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}} & (n\geqslant 2),\end{cases}$ T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 T_n.

20.（本小题共 14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点分别是 F_1，F_2，点 $M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上，且 $|MF_1|+|MF_2|=4$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 l：$y=kx+t(k\neq 0,t>0)$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 交于 A，B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$，点 Q 的坐标是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$，设直线 PQ 的斜率是 k_1，且 $k_1\cdot k=2$，求实数 t 的取值范围.

（考生务必将答案答在答题卡上，在实体卷上作答无效）

摸底考试文科参考答案

2012、1

一、选择题

1．C　2．B　3　C　4．B　5．A　6．A　7．B　8．B

二、填空题

9．$\frac{4023}{2012}$　　10．10　　11．15　　12．3

13．$y=\pm\sqrt{3}x$　　14．②

三、解答题

15．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1$，

所以 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.　　…….. 3 分

所以 $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi.$　　…….. 5 分

又因为 $-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

所以 $-\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π；最大值是 $\sqrt{2}$.　　…….. 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$

因为 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{3\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{4}$.

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值是1；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{8}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值是 $-\sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值是1，最小值是 $-\sqrt{2}$.　…….. 13 分

16.（Ⅰ）证明：∵点 M，N 分别是 CE，DE 的中点，

∴ MN 是 ΔCDE 的中位线.

∴ $MN\,//\,CD.$

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $CD\,//\,AB.$

$\therefore MN // AB.$

$\because AB \subset$ 平面 ABE， $MN \not\subset$ 平面 ABE，

$\therefore MN //$ 平面 ABE. …….. 6 分

（Ⅱ）证明：$\because BF \perp$ 平面 ACE， $AE \subset$ 平面 ACE，

$\therefore BF \perp AE.$

$\because BC \perp$ 平面 ABE， $AE \subset$ 平面 ACE，

$\therefore BC \perp AE.$

$\because BF \cap BC = B$， $BF \subset$ 平面 BCE， $BC \subset$ 平面 BCE，

$\therefore AE \perp$ 平面 BCE.

$\therefore AE \perp BE.$ …….. 13 分

17. 解：设甲袋中 1 只白球记为 a_1，2 只红球记为 b_1, b_2；乙袋中 2 只白球记为 a_2, a_3，2 只红球记为 b_3, b_4.

所以“从两袋中各取一球”包含基本事件 (a_1, a_2)，(a_1, a_3)，(a_1, b_3)，(a_1, b_4)，(b_1, a_2)，(b_1, a_3)，(b_1, b_3)，(b_1, b_4)，(b_2, a_2)，(b_2, a_3)，(b_2, b_3)，(b_2, b_4) 共有 12 种.

…….. 4 分

（Ⅰ）设 A 表示“从两袋中各取一球，两球颜色相同”，

所以事件 B 包含基本事件 (a_1, a_2)，(a_1, a_3)，(b_1, b_3)，(b_1, b_4)，(b_2, b_3)，(b_2, b_4) 共有 6 种.

所以 $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$ …….. 8 分

（Ⅱ）设 B 表示“从两袋中各取一球，至少有一个白球”，

所以事件 A 包含基本事件 (a_1, a_2)，(a_1, a_3)，(a_1, b_3)，(a_1, b_4)，(b_1, a_2)，(b_1, a_3)，(b_2, a_2)，(b_2, a_3) 共有 8 种.

所以 $P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$ …….. 13 分

18. 解：（Ⅰ）因为 $f(x) = ax - \ln x$，

所以 $f'(x) = a - \frac{1}{x}.$

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y + 1 = 0$ 平行，

所以切线的斜率 $k = 1.$

所以 $f'(1) = 1$，即 $a - 1 = 1.$

所以 $a = 2.$ …….. 4 分

（Ⅱ）因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$，

…….. 6 分

①当 $a\le 0$ 时， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. …….. 8 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$， $x=\dfrac{1}{a}$.

所以当 $a\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上是减函数；

…….. 10 分

当 $a\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上是增函数.

…….. 12 分

所以当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 的递减区间是 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的递减区间是 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$， $f(x)$ 的递增区间是 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

…….. 13 分

19．解：（Ⅰ）因为 $2S_n=n(3a_1+a_n)$， $S_1=a_1=a$，

所以 $a=0$. …….. 3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $S_n=\dfrac{na_n}{2}$， 所以 $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{2}$.

所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{2}-\dfrac{na_n}{2}$.

所以 $(n-1)a_{n+1}=na_n$.

所以当 $n\ge 2$ 时， $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n-1}$.

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n-1}$ $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n-2}$,, …， $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{1}$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_2}=n$.

所以 $a_n=2(n-1)$， $n\ge 2$.

因为 $a_1=a=0$ 满足上式，

所以$a_n=2(n-1)$，$n\in N^*$. …….. 8 分

（Ⅲ）当$n\geq 2$时，$b_n=\dfrac{8}{2n\cdot 2(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. …….. 10 分

又$b_1=2$，

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=2+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ …….. 12 分

$=2+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{3n+1}{n+1}$

所以$T_n=\dfrac{3n+1}{n+1}$. …….. 14 分

20．解：（Ⅰ）因为点$M\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$在椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，且$|MF_1|+|MF_2|=4$，

所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，$2a=4$.

所以$a^2=4$，$b^2=1$.

所以椭圆C的标准方程是$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …….. 3 分

（Ⅱ）联立方程组$\begin{cases}y=kx+t,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去y，得$(1+4k^2)x^2+8ktx+4(t^2-1)=0$.

所以$\Delta=64k^2t^2-16(1+4k^2)(t^2-1)>0$， …….. 4 分

即$1+4k^2>t^2$. ① …….. 5 分

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，所以$x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$. …….. 6 分

因为$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=0$

所以点P是AB的中点，设$P(x_P,y_P)$，

所以$x_p=\dfrac{-4kt}{1+4k^2}$，$y_p=kx_P+t=\dfrac{1}{1+4k^2}$. …….. 8 分

因为点Q的坐标是$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，直线$PQ$的斜率是$k_1$，

所以 $k_1=\dfrac{y_P-\dfrac{3}{2}}{x_P}=\dfrac{2t-3\left(1+4k^2\right)}{-8kt}.$ …….. 10 分

因为 $k_1\cdot k=2$，

所以 $k\cdot\dfrac{2t-3\left(1+4k^2\right)}{-8kt}=2.$

所以 $1+4k^2=6t.$ ② …….. 12 分

所以由①，②式，可得 $6t>t^2.$

所以 $0<t<6.$

所以实数 t 的取值范围是 $0<t<6.$ …….. 14 分

海淀区高三年级第一学期期末练习

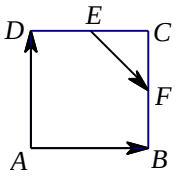
数 学（文科）

2012.01

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）复数 $\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=$

（A）$-2+\mathrm{i}$ （B）$2+\mathrm{i}$ （C）$2-\mathrm{i}$ （D）$-2-\mathrm{i}$



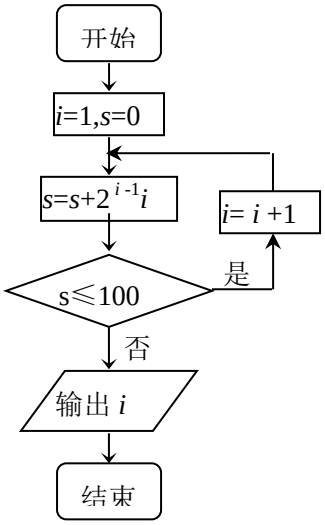
（2）如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 DC，BC 的中点，那么 $\overrightarrow{EF}=$

（A）$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ （B）$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ （C）$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ （D）$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

（3）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1,\ a_n>0,\ a_{n+1}^2-a_n^2=1(n\in\mathbf{N}^*)$，那么使 $a_n<5$ 成立的 n 的最大值为（ ）

（A）4 （B）5 （C）24 （D）25

（4）某程序的框图如图所示，若执行该程序，则输出的 i 值为

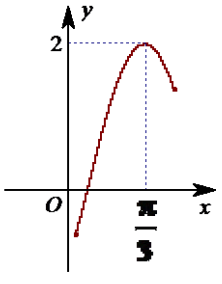


（A）5 （B）6

（C）7 （D）8

（5）已知直线 l_1：$k_1x+y+1=0$ 与直线 l_2：$k_2x+y-1=0$，那么“$k_1=k_2$”是“$l_1\parallel l_2$”的

（A）充分不必要条件 （B）必要不充分条件（C）充要条件 （D）既不充分也不必要条件



（6）函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A,\varphi\in\mathbf{R})$ 的部分图象如图所示，那么 $f(0)=$

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）-1　　（C）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$-\sqrt{3}$

（7）已知函数 $f(x)=x|x|-2x$，则下列结论正确的是

（A） $f(x)$ 是偶函数，递增区间是 $0,+\infty$　　（B） $f(x)$ 是偶函数，递减区间是 $(-\infty,1)$

（C） $f(x)$ 是奇函数，递减区间是 $-1,1$　　（D） $f(x)$ 是奇函数，递增区间是 $-\infty,0$

（8）点 A 到图形 C 上每一个点的距离的最小值称为点 A 到图形 C 的距离. 已知点 $A(1,0)$，圆 C：$x^2+2x+y^2=0$，那么平面内到圆 C 的距离与到点 A 的距离之差为 1 的点的轨迹是

（A）双曲线的一支　　（B）椭圆　　（C）抛物线　　（D）射线

二、填空题：本大题共6小题，每小题6分，共30分，把答案填在题中横线上.

（9）双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的离心率为_____.

（10）已知抛物线 $y^2=ax$ 过点 $A(\frac{1}{4},1)$，那么点 A 到此抛物线的焦点的距离为_____.

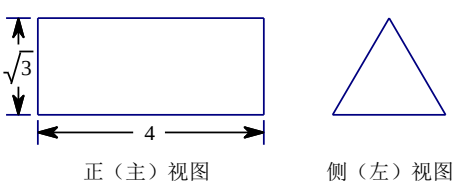
（11）若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-4\le 0,\\ 2x+y-5\ge 0,\\ y-1\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为_____.

（12）甲和乙两个城市去年上半年每月的平均气温（单位：℃）用茎叶图记录如下，根据茎叶图可知，两城市中平均温度较高的城市是_____，气温波动较大的城市是_____.

甲城市				乙城市		
		9	0			
8	7	7	3	1	2	4	7
			2	2	0	4	7

（13）已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=8$，过点 $A(-1,0)$ 的直线 l 将圆 C 分成弧长之比为 $1:2$ 的两段圆弧，则直线 l 的方程为_____.

（14）已知正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的正（主）视图和侧（左）视图如图所示. 设 $\Delta ABC,\Delta A'B'C'$ 的中心分别是 O,O'，现将此三棱柱绕直线 OO' 旋转，射线 OA 旋转所成的角为 x 弧度（x 可以取到任意一个实数），对应的俯视图的面积为 $S(x)$，则函数 $S(x)$ 的最大值为_____；最小正周



正（主）视图　　侧（左）视图

期为_____.

说明：“三棱柱绕直线OO'旋转”包括逆时针方向和顺时针方向，逆时针方向旋转时，OA旋转所成的角为正角，顺时针方向旋转时，OA旋转所成的角为负角.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 13 分）在ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$A=2B$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

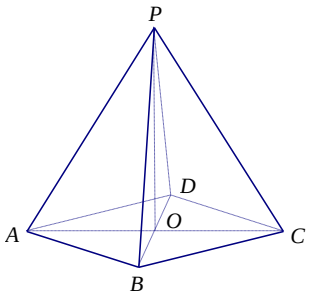
（Ⅰ）求$\cos A$的值；（Ⅱ）若$b=2$，求边a,c的长.

(16)（本小题满分 13 分）

为加强大学生实践、创新能力和团队精神的培养，促进高等教育教学改革，教育部门主办了全国大学生智能汽车竞赛. 该竞赛分为预赛和决赛两个阶段，参加决赛的队伍按照抽签方式决定出场顺序.通过预赛，选拔出甲、乙和丙三支队伍参加决赛.

（Ⅰ）求决赛中甲、乙两支队伍恰好排在前两位的概率；

（Ⅱ）求决赛中甲、乙两支队伍出场顺序相邻的概率.



（17）（本小题满分 13 分）在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$AC\cap BD=O$.

（Ⅰ）若$AC\perp PD$，求证：$AC\perp$平面PBD；

（Ⅱ）若平面$PAC\perp$平面$ABCD$，求证：$PB=PD$；

（Ⅲ）在棱PC上是否存在点M（异于点C）使得BM//平面PAD，若存在，求$\frac{PM}{PC}$的值；若不存在，说明理由.

(18)（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+ax-a)$，其中 a 是常数.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小值.

（19）（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F_{1}(1,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程及左顶点 P 的坐标；

（Ⅱ）设过点 F_{1} 的直线交椭圆 C 于 A,B 两点，若 ΔPAB 的面积为 $\dfrac{36}{13}$，求直线 AB 的方程.

（20）（本小题满分 14 分）若集合 A 具有以下性质：①$0\in A$，$1\in A$；②若 $x,y\in A$，则 $x-y\in A$，且 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\in A$.

则称集合 A 是“好集”.

（Ⅰ）分别判断集合 $B=\{-1,0,1\}$，有理数集 $\mathbf{Q}$ 是否是“好集”，并说明理由；

（Ⅱ）设集合 A 是“好集”，求证：若 $x,y\in A$，则 $x+y\in A$；

（Ⅲ）对任意的一个“好集” A，分别判断下面命题的真假，并说明理由.

命题 p：若 $x,y\in A$，则必有 $xy\in A$；　　命题 q：若 $x,y\in A$，且 $x\neq 0$，则必有 $\dfrac{y}{x}\in A$；

参考答案及评分标准　　2012．01

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	A	C	B	C	D

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

（9）$\frac{3}{2}$　（10）$\frac{5}{4}$　（11）7　（12）乙，乙　（13）$y=x+1$或$y=-x-1$　（14）8；$\frac{\pi}{3}$

注：（13）题正确答出一种情况给3分，全对给5分；（12）、（14）题第一空3分；第二空2分.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A=2B$，所以 $\cos A=\cos 2B=1-2\sin^2 B$. 因为 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$\cos A=1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）由题意可知，$B\in(0,\frac{\pi}{2})$. 所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 所以

$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，$b=2$，所以$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{a}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$. 所以$a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

由 $\cos A=\frac{1}{3}$ 可知，$A\in(0,\frac{\pi}{2})$. 过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D. 所以

$c=a\cos B+b\cos A=\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$.

(16)（本小题满分 13 分）

解：基本事件空间包含的基本事件有“甲乙丙，甲丙乙，乙甲丙，乙丙甲，丙甲乙，丙乙甲”.

（Ⅰ）设“甲、乙两支队伍恰好排在前两位”为事件 A，事件 A 包含的基本事件有“甲乙丙，乙甲丙”，则 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.所以 甲、乙两支队伍恰好排在前两位的概率为$\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）设“甲、乙两支队伍出场顺序相邻”为事件 B，事件 B 包含的基本事件

有“甲乙丙，乙甲丙，丙甲乙，丙乙甲”，则 $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 所以甲、乙两支队伍出场顺序相邻的概率为 $\frac{2}{3}$.

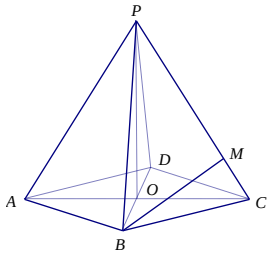
(17)（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：因为 底面 $ABCD$ 是菱形所以 $AC\perp BD$. 因为 $AC\perp PD$，$PD\cap BD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 PBD.

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）可知 $AC\perp BD$.

因为 平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

因为 $PO\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PO$. 因为 底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BO=DO$. 所以 $PB=PD$.



（Ⅲ）解：不存在. 下面用反证法说明.

假设存在点 M（异于点 C）使得 BM // 平面 PAD. 在菱形 $ABCD$ 中，BC // AD，因为 $AD\subset$ 平面 PAD，$BC\not\subset$ 平面 PAD，所以 BC // 平面 PAD.

因为 $BM\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，$BC\cap BM=B$，所以 平面 PBC // 平面 PAD. 而平面 PBC 与平面 PAD 相交，矛盾.

(18)（本小题满分 13 分）解：（Ⅰ）由 $f(x)=e^x(x^2+ax-a)$ 可得 $f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x]$.

当 $a=1$ 时，$f(1)=e$，$f'(1)=4e$. 所以 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f$ (1处的切线方程为 $y-e=4e(x-1)$，即 $y=4ex-3e$.

（Ⅱ）令 $f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x]=0$，解得 $x=-(a+2)$ 或 $x=0$. 当 $-(a+2)\le 0$，即 $a\ge -2$ 时，在区间 $[0,+\infty)$ 上，$f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数. 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-a$；

当 $-(a+2)>0$，即 $a<-2$ 时，$f'(x),f(x)$ 随 x 的变化情况如下表

x	0	$(0,-(a+2))$	$-(a+2)$	$(-(a+2),+\infty)$
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(-(a+2))$	↗

由上表可知函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-(a+2))=\frac{a+4}{e^{a+2}}$.

（19）解：（Ⅰ）由题意可知：$c=1$，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2$．　所以 $b^2=a^2-c^2=3$. 所以 椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，左顶点$P$的坐标是$(-2,0)$.

（Ⅱ）根据题意可设直线AB的方程为$x=my+1$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1\end{cases}$可得：

$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

所以 $\Delta=36m^2+36(3m^2+4)>0$， $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$， $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

所以 ΔPAB的面积

$S=\frac{1}{2}|PF_1||y_2-y_1|=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_2y_1}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{(-\frac{6m}{3m^2+4})^2+\frac{36}{3m^2+4}}=\frac{18\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$.

因为ΔPAB的面积为$\frac{36}{13}$，所以$\frac{\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{2}{13}$.令$t=\sqrt{m^2+1}$，则$\frac{t}{3t^2+1}=\frac{2}{13}(t\geq1)$.

解得$t_1=\frac{1}{6}$（舍），$t_2=2$.所以$m=\pm\sqrt{3}$.

所以直线AB的方程为$x+\sqrt{3}y-1=0$或$x-\sqrt{3}y-1=0$.

（20）（本小题满分 14 分）解：（Ⅰ）集合B不是“好集”．理由是：假设集合B是“好集”．

因为$-1\in B$，$1\in B$，所以$-1-1=-2\in B$．这与$-2\notin B$矛盾.有理数集$\mathbf{Q}$是“好集”．因为$0\in\mathbf{Q}$，$1\in\mathbf{Q}$，

对任意的$x,y\in\mathbf{Q}$，有$x-y\in\mathbf{Q}$，且$x\neq0$时，$\frac{1}{x}\in\mathbf{Q}$.所以有理数集$\mathbf{Q}$是“好集”．

（Ⅱ）因为集合A是“好集”，　所以 $0\in A$.若$x,y\in A$，则$0-y\in A$，即$-y\in A$.所以$x-(-y)\in A$，即$x+y\in A$.

（Ⅲ）命题p,q均为真命题．理由如下：　对任意一个“好集”A，任取$x,y\in A$，　若x,y中有 0 或 1 时，显然$xy\in A$.

下设 x, y 均不为0，1. 由定义可知：$x-1, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x} \in A$.所以 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x} \in A$，即 $\frac{1}{x(x-1)} \in A$.所以 $x(x-1) \in A$.

由（Ⅱ）可得：$x(x-1)+x \in A$，即 $x^2 \in A$. 同理可得 $y^2 \in A$.若 $x+y=0$ 或 $x+y=1$，则显然 $(x+y)^2 \in A$.

若 $x+y \neq 0$ 且 $x+y \neq 1$，则 $(x+y)^2 \in A$.所以 $2xy=(x+y)^2-x^2-y^2 \in A$.所以 $\frac{1}{2xy} \in A$.

由（Ⅱ）可得：$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy} \in A$.所以 $xy \in A$.综上可知，$xy \in A$，即命题 p 为真命题.若 $x, y \in A$，且 $x \neq 0$，则 $\frac{1}{x} \in A$.所以 $\frac{y}{x}=y \cdot \frac{1}{x} \in A$，即命题 q 为真命题.

丰台区 2011—2012 学年度第一学期期末练习 2012.01

高三数学（文科）

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设集合 A={x | x<4}，B={x | x2<4}，则

(A) A⊆B　　(B) B⊆A　　(C) A⊆$\complement_R B$　　(D) B⊆$\complement_R A$

2．在复平面内，复数 $\frac{-1+i}{i}$ 对应的点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3．已知命题 p：$\exists x \in R$，$\frac{1}{x} > x$，命题 q：$\forall x \in R$，$x^2 > 0$，则

(A) 命题 $p \vee q$ 是假命题　　(B) 命题 $p \wedge q$ 是真命题

(C) 命题 $p \vee (\neg q)$ 是假命题　　(D) 命题 $p \wedge (\neg q)$ 是真命题

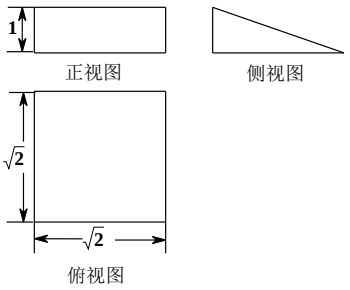
4．预测人口的变化趋势有多种方法，“直接推算法”使用的公式是 $P_n = P_0(1+k)^n (k > -1)$，其中 Pn 为预测人口数，P0 为初期人口数，k 为预测年内增长率，n 为预测期间隔年数．如果在某一时期有-1<k<0，那么这期间人口数

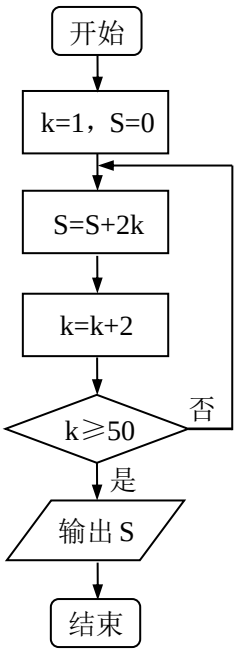
(A) 呈上升趋势　　(B) 呈下降趋势

(C) 摆动变化　　(D) 不变

5．若某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) 1　　(D) 2





6．执行如右图所示的程序框图，输出的 S 值为

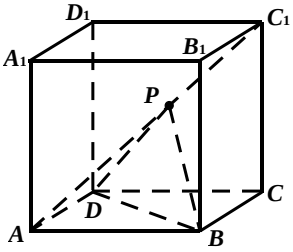
(A) 650　　(B) 1250

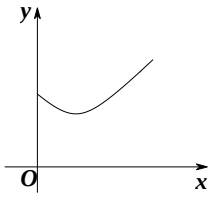
(C) 1352　　(D) 5000

7．若函数 $f(x) = \log_2(x + \frac{1}{x}) - a$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点，则实数 a 的取值范围是

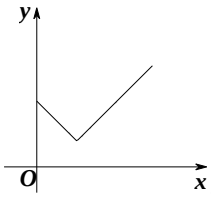
(A) $(-\log_2\frac{5}{2}, -1)$　　(B) $(1, +\infty)$　　(C) $(0, \log_2\frac{5}{2})$　　(D) $(1, \log_2\frac{5}{2})$

8．如图，P 是正方体 ABCD—A1B1C1D1 对角线 AC1 上一动点，设 AP 的长度为 x，若△PBD 的面积为 f(x)，则 f(x)的图象大致是

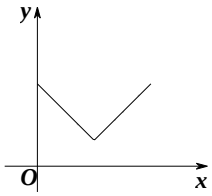




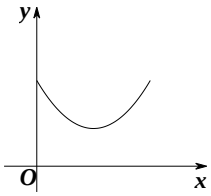
(A)



(B)



(C)



(D)

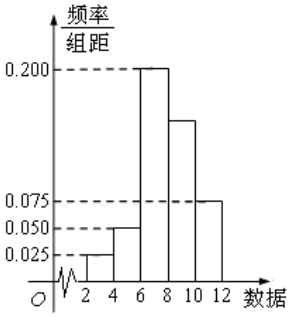
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．过点(-1,3)且与直线 x-2y+3=0 平行的直线方程为　.

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,(x>0),\\ 2^x,\quad (x\le 0).\end{cases}$ 若 $f(a)=\frac{1}{2}$，则 a=　.

11．某个容量为 100 的样本的频率分布直方图如图所示，则数据在区间 $[8,10)$ 上的频数是　.



12．若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角等于___.

13．设 Sn 是等比数列{an}的前 n 项和，若 S1，2S2，3S3 成等差数列，则公比 q 等于　.

14．函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对于定义域内任意 x_1，x_2 $(x_1\neq x_2)$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为恒均变函数．给出下列函数：① $f(x)=2x+3$；② $f(x)=x^2-2x+3$；③ $f(x)=\frac{1}{x}$；④ $f(x)=e^x$；⑤ $f(x)=\ln x$．其中为恒均变函数的序号是　.（写出所有满足条件的函数序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin x$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

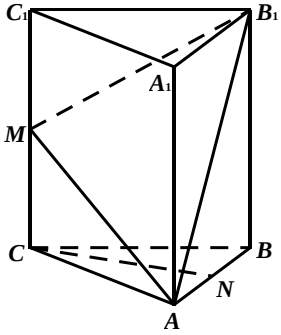
（Ⅱ）若 α 为第二象限角，且 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\tan\alpha}$ 的值．

16.（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱 ABC-A1B1C1 中，CC1⊥底面 ABC，AC=BC，M，N 分别是 CC1，AB 的中点．

（Ⅰ）求证：CN⊥AB1；

（Ⅱ）求证：CN //平面 AB1M．



17.（本小题共 13 分）

为了解某地区中学生的身体发育状况，拟采用分层抽样的方法从甲、乙、丙三所中学抽取 6 个教学班进行调查.已知甲、乙、丙三所中学分别有 12，6，18 个教学班.

（Ⅰ）求从甲、乙、丙三所中学中分别抽取的教学班的个数；

（Ⅱ）若从抽取的 6 个教学班中随机抽取 2 个进行调查结果的对比，求这 2 个教学班中至少有 1 个来自甲学校的概率.

18.（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y-4=0$ 相切.

（Ⅰ）求圆 O 的方程；

（Ⅱ）直线 l：$y=kx+3$ 与圆 O 交于 A，B 两点，在圆 O 上是否存在一点 M，使得四边形 $OAMB$ 为菱形，若存在，求出此时直线 l 的斜率；若不存在，说明理由.

19.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=2ax+\frac{b}{x}+\ln x$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$，$x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，求 a，b 的值；

（Ⅱ）若 $f'(1)=2$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，求 a 的取值范围.

20.（本小题共 13 分）

函数 $f(x)$ 的定义域为 R，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$（$n\in N^*$ 且 $n\geq 2$）.

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1\neq a_2$，且 $f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$（k 为非零常数，$n\in N^*$ 且 $n\geq 2$），求 k 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)=kx(k>1)$，$a_1=2$，$b_n=\ln a_n(n\in N^*)$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对于给定的正整数 m，如果 $\frac{S_{(m+1)n}}{S_{mn}}$ 的值与 n 无关，求 k 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2011—2012 学年度第一学期期末练习 2012．01

高三数学（文科）答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	B	C	B	D	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．$x-2y+7=0$　　10．-1 或 $\sqrt{2}$　　11．30

12．$\frac{\pi}{4}$　　13．$\frac{1}{3}$　　14．①②

注：第 10，14 题只写出一个答案给 2 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（Ⅱ）若 α 为第二象限角，且 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\tan\alpha}$ 的值.

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=1+\cos x-\sqrt{3}\sin x$ ……1 分

$=1+2\cos(x+\frac{\pi}{3})$，……3 分

所以函数 $f(x)$ 的周期为 2π，值域为 $[-1,3]$. ……5 分

（Ⅱ）因为 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，

所以 $1+2\cos\alpha=\frac{1}{3}$，即 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. ……6 分

因为 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ ……8 分

$=\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$=\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$， ……10 分

因为α为第二象限角， 所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……11 分

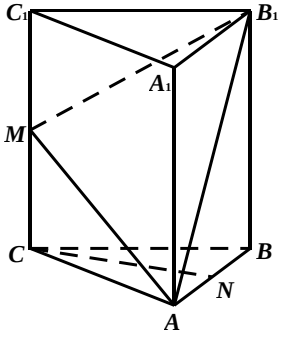
所以 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}=\frac{1-2\sqrt{2}}{9}$. ……13 分

16.（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱 ABC-A1B1C1 中，CC1⊥底面 ABC，AC=BC，M，N 分别是 CC1，AB 的中点.

（Ⅰ）求证：CN⊥AB1；

（Ⅱ）求证：CN //平面 AB1M.



证明：（Ⅰ）因为三棱柱 ABC-A1B1C1 中 CC1⊥底面 ABC，

所以 BB1⊥平面 ABC， 所以 BB1⊥CN. ……1 分

因为 AC=BC，N 是 AB 的中点，

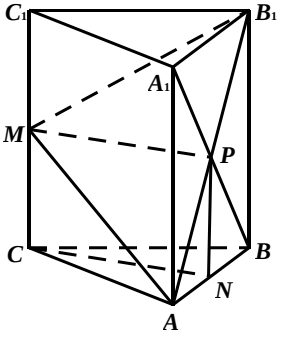
所以 CN⊥AB. ……3 分

因为 AB∩BB1=B， ……4 分

所以 CN⊥平面 AB B1A1. ……5 分

所以 CN⊥AB1. ……6 分

（Ⅱ）（方法一）连结 A1B 交 AB1 于 P. ……7 分



因为三棱柱 ABC-A1B1C1，

所以 P 是 A1B 的中点.

因为 M，N 分别是 CC1，AB 的中点，

所以 NP // CM，且 NP = CM， ……9 分

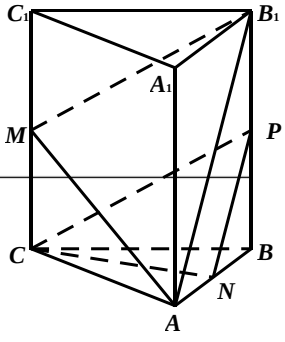
所以四边形 MCNP 是平行四边形， ……10 分

所以 CN//MP. ……11 分

因为 CN⊄平面 AB1M，MP⊂平面 AB1M， ……12 分

所以 CN //平面 AB1M. ……14 分

（方法二）取 BB1 中点 P，连结 NP，CP. ……7 分



因为 N，P 分别是 AB，BB1 的中点，

所以 NP //AB1.

因为 NP⊄平面 AB1M，AB1⊂平面 AB1M，
所以 NP //平面 AB1M．　　……10 分
同理 CP //平面 AB1M．　　……11 分
因为 CP∩NP =P，
所以平面 CNP //平面 AB1M．　　……13 分
因为 CN⊂平面 CNP，
所以 CN //平面 AB1M．　　……14 分

17.（本小题共 13 分）

为了解某地区中学生的身体发育状况，拟采用分层抽样的方法从甲、乙、丙三所中学抽取 6 个教学班进行调查．已知甲、乙、丙三所中学分别有 12，6，18 个教学班．

（Ⅰ）求从甲、乙、丙三所中学中分别抽取的教学班的个数；

（Ⅱ）若从抽取的 6 个教学班中随机抽取 2 个进行调查结果的对比，求这 2 个教学班中至少有 1 个来自甲学校的概率．

解：（Ⅰ）由已知可知在甲、乙、丙三所中学共有教学班的比是 12:6:18=2:1:3，　　……1 分

所以甲学校抽取教学班数为 $6\times\frac{2}{6}=2$ 个，乙学校抽取教学班数为 $6\times\frac{1}{6}=1$ 个，丙学校抽取教学班数为 $6\times\frac{3}{6}=3$ 个，　　……4 分

所以分别抽取的教学班个数为 2，1，3．　　……5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，从甲、乙、丙三所中学分别抽取 2，1，3 个教学班，不妨分别记为 A_1，A_2，B_1，C_1，C_2，C_3，则从 6 个教学班中随机抽取 2 个教学班的基本事件为：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,C_1)，(A_1,C_2)，(A_1,C_3)，(A_2,B_1)，(A_2,C_1)，(A_2,C_2)，(A_2,C_3)，(B_1,C_1)，(B_1,C_2)，(B_1,C_3)，(C_1,C_2)，(C_1,C_3)，(C_2,C_3) 共 15 个．　　……7 分

设“从 6 个教学班中随机抽取 2 个教学班，至少有 1 个来自甲学校”为事件 D，　　……8 分

则事件 D 包含的基本事件为：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,C_1)，(A_1,C_2)，(A_1,C_3)，(A_2,B_1)，(A_2,C_1)，(A_2,C_2)，(A_2,C_3) 共 9 个．　　……10 分

所以 $P(D)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$．　　……12 分

所以从抽取的 6 个教学班中随机抽取 2 个，且这 2 个教学班中至少有 1 个来自甲学校的概率为 $\frac{3}{5}$．

……13 分

18.（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y-4=0$ 相切.

（Ⅰ）求圆 O 的方程；

（Ⅱ）直线 l：$y=kx+3$ 与圆 O 交于 A，B 两点，在圆 O 上是否存在一点 M，使得四边形 $OAMB$ 为菱形，若存在，求出此时直线 l 的斜率；若不存在，说明理由.

解：（Ⅰ）设圆 O 的半径为 r，因为直线 $x-\sqrt{3}y-4=0$ 与圆 O 相切，

所以 $r=\dfrac{|0-\sqrt{3}\times 0-4|}{\sqrt{1+3}}=2$. ……3 分

所以圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$. ……5 分

（Ⅱ）（方法一）因为直线 l：$y=kx+3$ 与圆 O 相交于 A，B 两点，

所以 $d_{O-l}=\dfrac{|3|}{\sqrt{1+k^2}}<2$，解得 $k>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……7 分

假设存在点 M，使得四边形 $OAMB$ 为菱形， ……8 分

则 OM 与 AB 互相垂直且平分， ……9 分

所以原点 O 到直线 l：$y=kx+3$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{2}|OM|=1$. ……10 分

所以 $d_{O-l}=\dfrac{|3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k^2=8$， ……11 分

即 $k=\pm 2\sqrt{2}$，经验证满足条件. ……12 分

所以存在点 M，使得四边形 $OAMB$ 为菱形. ……13 分

（方法二）记 OM 与 AB 交于点 $C(x_0,y_0)$.

因为直线 l 斜率为 k，显然 $k\neq 0$，所以 OM 直线方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$. ……7 分

$\begin{cases}y=kx+3\\ y=-\dfrac{1}{k}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{-3k}{k^2+1}\\ y_0=\dfrac{3}{k^2+1}\end{cases}$，所以点 M 坐标为 $M\left(\dfrac{-6k}{k^2+1},\dfrac{6}{k^2+1}\right)$， ……9 分

因为点 M 在圆上，所以 $(\frac{-6k}{k^2+1})^2+(\frac{6}{k^2+1})^2=4$，解得 $k^2=8$，……11 分

即 $k=\pm 2\sqrt{2}$，经验证满足条件.……12 分

所以存在点 M，使得四边形 $OAMB$ 为菱形.……13 分

19.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=2ax+\frac{b}{x}+\ln x$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$，$x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，求 a，b 的值；

（Ⅱ）若 $f'(1)=2$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，求 a 的取值范围.

解:（Ⅰ）$f'(x)=2a-\frac{b}{x^2}+\frac{1}{x}$，……2 分

由 $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$，……4 分

可得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$.……6 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，……7 分

因为 $f'(1)=2$，所以 $b=2a-1$.……8 分

所以 $f'(x)=\frac{2ax^2+x-(2a-1)}{x^2}=\frac{(x+1)[2ax-(2a-1)]}{x^2}$，……9 分

要使 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，只要 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

……10 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{x+1}{x^2}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调函数；……11 分

当$a<0$时，令$f'(x)=0$，得$x_1=-1$，$x_2=\frac{2a-1}{2a}=1-\frac{1}{2a}>1$，

此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上不是单调函数；……12 分

当$a>0$时，要使$f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调函数，只要$1-2a\geqslant 0$，即$0<a\leqslant\frac{1}{2}$．……13 分

综上所述，a的取值范围是$a\in[0,\frac{1}{2}]$．……14 分

20.（本小题共 13 分）

函数$f(x)$的定义域为 R，数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(a_{n-1})$（$n\in N^*$且$n\geq 2$）.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$成等差，$a_1\neq a_2$，且$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$(k 为非零常数，$n\in N^*$且$n\geq 2$)，求 k 的值；

（Ⅱ）若$f(x)=kx(k>1)$，$a_1=2$，$b_n=\ln a_n(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，对于给定的正整数m，如果$\frac{S_{(m+1)n}}{S_{mn}}$的值与 n 无关，求 k 的值.

解：（Ⅰ）当$n\geq 2$时，

因为$a_n=f(a_{n-1})$，$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$，

所以$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$.

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$.

因为$a_{n+1}-a_n=k(a_n-a_{n-1})$，所以$k=1$.……6 分

（Ⅱ）因为$f(x)=kx(k>1)$，$a_1=2$，且$a_{n+1}=f(a_n)$，

所以$a_{n+1}=ka_n$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为k的等比数列，

所以$a_n=2k^{n-1}$.

所以$b_n=\ln a_n=\ln 2+(n-1)\ln k$.

因为$b_n - b_{n-1} = \ln k$，

所以$\{b_n\}$是首项为$\ln 2$，公差为$\ln k$的等差数列.

所以 $S_n = \dfrac{(b_1 + b_n)n}{2} = n[\ln 2 + \dfrac{(n-1)}{2}\ln k]$.

因为 $\dfrac{S_{(m+1)n}}{S_{mn}} = \dfrac{(m+1)n\{\ln 2 + \dfrac{[(m+1)n-1]}{2}\ln k\}}{mn[\ln 2 + \dfrac{(mn-1)}{2}\ln k]} = \dfrac{(m+1)[(m+1)n\ln k + 2\ln 2 - \ln k]}{m[mn\ln k + 2\ln 2 - \ln k]}$，

又因为 $\dfrac{S_{(m+1)n}}{S_{mn}}$ 的值是一个与 n 无关的量，

所以 $\dfrac{2\ln 2 - \ln k}{mn\ln k} = \dfrac{2\ln 2 - \ln k}{(m+1)n\ln k}$，

解得$k = 4$. ……13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）

北京市东城区 2011-2012 学年度高三数第一学期期末教学统一检测数学

文科

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

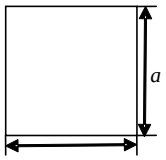
（1）已知集合 $A=\{x|x\geq 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则

（A）$A\subseteq B$　　（B）$B\subseteq A$　　（C）$A\cup B=B$　　（D）$A\cap B=\varnothing$

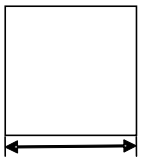
（2）复数 $1+\frac{1}{i}$ 在复平面上对应的点的坐标是

（A）$(1,1)$　　（B）$(-1,1)$　　（C）$(-1,-1)$　　（D）$(1,-1)$

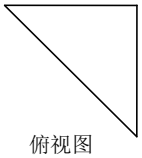
（3）一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为



正（主）视图



侧（左）视图


俯视图

（A）$\frac{a^3}{2}$　　（B）$\frac{a^3}{6}$

（C）$\frac{a^3}{12}$　　（D）$\frac{a^3}{18}$

（4）下列命题中正确的是

（A）如果两条直线都平行于同一个平面，那么这两条直线互相平行

（B）过一条直线有且只有一个平面与已知平面垂直

（C）如果一条直线平行于一个平面内的一条直线，那么这条直线平行于这个平面

（D）如果两条直线都垂直于同一平面，那么这两条直线共面

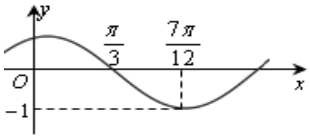
（5）设 $x>0$，且 $1<b^x<a^x$，则

（A）$0<b<a<1$　　（B）$0<a<b<1$　　（C）$1<b<a$　　（D）$1<a<b$

（6）在平面直角坐标系内，若曲线 C：$x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$ 上所有的点均在第二象限内，则实数 a 的取值范围为（A）$(-\infty,-2)$　　（B）$(-\infty,-1)$　　（C）$(1,+\infty)$

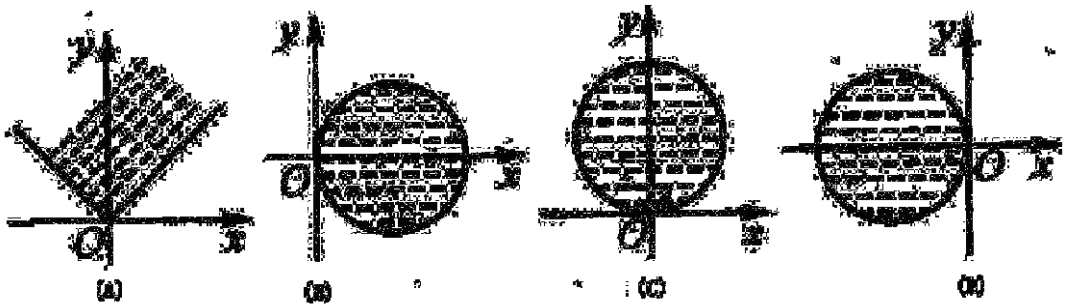
（D）$(2,+\infty)$

（7）函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图象如图所示，为了得到 $g(x)=\sin\omega x$ 的图象，则只要将 $f(x)$ 的图象　（A）向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度



（C）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　（D）向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

（8）在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 关于 y 轴对称，向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，则满足不等式 $\overrightarrow{OA}^2+\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}\leq 0$ 的点 $A(x,y)$ 的集合用阴影表示为



第Ⅱ卷（共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(3m-1,4-m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 m 的值为____.

（10）已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为___.

（11）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & x\le 0,\\ f(x-1), & x>0,\end{cases}$ 则 $f(\frac{5}{6})$ 的值为____.

（12）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5+a_7=4$，$a_6+a_8=-2$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差等于____；其前 n 项和 S_n 的最大值为____.

(13) 对于函数 $f(x)=\lg|x-2|+1$，有如下三个命题：

① $f(x+2)$ 是偶函数；② $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上是减函数，在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数；

③ $f(x+2)-f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数．其中正确命题的序号是____.（将你认为正确的命题序号都填上）

(14) 在平面内，已知直线 $l_1\parallel l_2$，点 A 是 l_1,l_2 之间的定点，点 A 到 l_1，l_2 的距离分别为 3 和 2，点 B 是 l_2 上的一个动点，若 $AC\perp AB$，且 AC 与 l_1 交于点 C，则△ ABC 面积的最小值为____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）已知△ ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$.

（Ⅰ）若 $A=\frac{5\pi}{12}$，$b=1$，求 c；

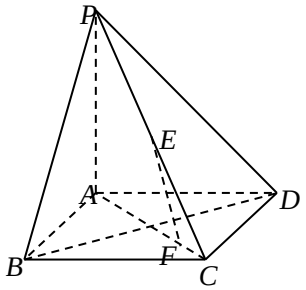
（Ⅱ）若 $a=2c$，求 A.

（16）（本小题共 13 分）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，其前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的各项均为正数，$b_1=1$，公比为q，且$b_2+S_2=12$，$q=\dfrac{S_2}{b_2}$.

（Ⅰ）求a_n与b_n；（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_n=\dfrac{1}{S_n}$，求$\{c_n\}$的前n项和T_n.

（17）（本小题共 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，E是PC中点，F为线段AC上一点.



（Ⅰ）求证：$BD\perp EF$；

（Ⅱ）试确定点F在线段AC上的位置，使EF//平面PBD，并说明理由.

（18）（本小题共 13 分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2-3m^2x+1\,(m>0)$.

（Ⅰ）若$m=1$，求曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程；

（Ⅱ）若函数$f(x)$在区间$(2m-1,m+1)$上单调递增，求实数m的取值范围.

（19）（本小题共 13 分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M(0,2)$是椭圆的一个顶点，$\triangle F_1MF_2$是等腰直角三角形.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）过点M分别作直线MA，MB交椭圆于A，B两点，设两直线的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1+k_2=8$，证明：直线AB过定点$(-\dfrac{1}{2},-2)$.

（20）（本小题共 14 分）已知 M 是由满足下述条件的函数构成的集合：对任意 $f(x)\in M$，①方程 $f(x)-x=0$ 有实数根；②函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 满足 $0<f'(x)<1$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{4}$ 是否是集合 M 中的元素，并说明理由；

（Ⅱ）集合 M 中的元素 $f(x)$ 具有下面的性质：若 $f(x)$ 的定义域为 D，则对于任意 $[m,n]\subseteq D$，都存在 $x_0\in(m,n)$，使得等式 $f(n)-f(m)=(n-m)f'(x_0)$ 成立．试用这一性质证明：方程 $f(x)-x=0$ 有且只有一个实数根.

东城区 2011-2012 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学参考答案及评分标准 （文科）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）B （2）D （3）A （4）D（5）C （6）D （7）A （8）B

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）1 （10）$-\frac{4}{3}$ （11）$-\frac{1}{2}$ （12）-3 57 （13）①② （14）6

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）解：（Ⅰ）由已知 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，整理得 $\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$．因为 $0<B<\pi$，

所以 $-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$．故 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得 $B=\frac{\pi}{3}$．由 $A=\frac{5\pi}{12}$，且 $A+B+C=\pi$，得 $C=\frac{\pi}{4}$．

由 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得 $c=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

（Ⅱ）因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，又 $a=2c$，$B=\frac{\pi}{3}$，所以 $b^2=4c^2+c^2-4c^2\times\frac{1}{2}$，解得

$b=\sqrt{3}c$．由此得 $a^2=b^2+c^2$，故△ ABC 为直角三角形，$A=\frac{\pi}{2}$．

（16）（共 13 分）解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $\begin{cases}b_2+S_2=12,\\ q=\frac{S_2}{b_2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}q+6+d=12,\\ q=\frac{6+d}{q}.\end{cases}$

解得 $q=3$ 或 $q=-4$（舍），$d=3$．故 $a_n=3+3(n-1)=3n$，$b_n=3^{n-1}$．

（Ⅱ）因为 $S_n=\frac{n(3+3n)}{2}$，所以 $c_n=\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(3+3n)}=\frac{2}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$．

故 $T_n=\frac{2}{3}\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{3(n+1)}$．

（17）（共 14 分）

证明（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$．又四边形 $ABCD$ 是正方形，所以

$AC\perp BD$，$PA\cap AC=A$，

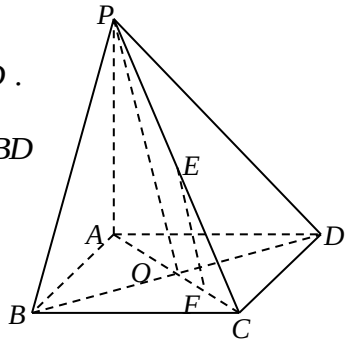
所以 $BD\perp$ 平面 PAC，又 $EF\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp EF$．

（Ⅱ）：设 AC 与 BD 交于 O，当 F 为 OC 中点，即 $AF=\frac{3}{4}AC$ 时，EF // 平面 PBD．

理由如下：连接 PO，因为 EF //平面 PBD，$EF\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 PBD $=PO$，所以 EF // PO．在△ POC 中，E 为 PC 的中点，所以 F 为 OC 中点．

在△ POC 中，E，F 分别为 PC，OC 的中点，所以 EF // PO．

又 $EF\not\subset$ 平面 PBD，$PO\subset$ 平面 PBD，故 EF //平面 PBD．



（18）（共 13 分）解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$，$f(2)=\frac{8}{3}+4-6+1=\frac{5}{3}$．

$f'(x)=x^2+2x-3$，$f'(2)=4+4-3=5$．所以所求切线方程为 $y-\frac{5}{3}=5(x-2)$ 即

$15x-3y-25=0$.

（Ⅱ）$f'(x)=x^2+2mx-3m^2$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-3m$或$x=m$. 由于 $m>0$， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-3m)$	$-3m$	$(-3m,m)$	m	$(m,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	单调增	极大值	单调减	极小值	单调增

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-3m)$ 和 $(m,+\infty)$. 要使 $f(x)$ 在区间 $(2m-1,m+1)$ 上单调递增，

应有 $m+1\leqslant -3m$ 或 $2m-1\geqslant m$， 解得 $m\leqslant -\frac{1}{4}$ 或 $m\geqslant 1$. 又 $m>0$ 且 $m+1>2m-1$，所以 $1\leqslant m<2$.

即实数 m 的取值范围 $\{m\mid 1\leq m<2\}$.

（19）（共 13 分）解：（Ⅰ）由已知可得 $b=2, a^2=\left(\sqrt{2}b\right)^2=8$，所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）若直线 AB 的斜率存在，设 AB 方程为 $y=kx+m$，依题意 $m\neq\pm 2$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-8=0$. 则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2}$.

由已知 $\frac{y_1-2}{x_1}+\frac{y_2-2}{x_2}=8$，所以 $\frac{kx_1+m-2}{x_1}+\frac{kx_2+m-2}{x_2}=8$，即 $2k+\left(m-2\right)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=8$.

所以 $k-\frac{mk}{m+2}=4$，整理得 $m=\frac{1}{2}k-2$. 故直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}k-2$，即 $y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)-2$.

所以直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$. 若直线 AB 的斜率不存在，设 AB 方程为 $x=x_0$，

设 $A(x_0,y_0)$， $B(x_0,-y_0)$，由已知 $\frac{y_0-2}{x_0}+\frac{-y_0-2}{x_0}=8$，得 $x_0=-\frac{1}{2}$. 此时 AB 方程为 $x=-\frac{1}{2}$，

显然过点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.

综上，直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.

（20）（共 14 分） 解：（Ⅰ）因为①当 $x=0$ 时， $f(0)=0$，所以方程 $f(x)-x=0$ 有实数根 0；

② $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x$，所以 $f'(x)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$，满足条件 $0<f'(x)<1$；由①②，函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{4}$ 是集合 M 中的元素.

（Ⅱ）假设方程 $f(x)-x=0$ 存在两个实数根 $\alpha,\beta(\alpha\neq\beta)$，则 $f(\alpha)-\alpha=0, f(\beta)-\beta=0$. 不妨设 $\alpha<\beta$，根据题意存在 $c\in(\alpha,\beta)$，满足 $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(c)$. 因为 $f(\alpha)=\alpha$， $f(\beta)=\beta$，且 $\alpha\neq\beta$，所以 $f'(c)=1$.

与已知 $0<f'(x)<1$ 矛盾. 又 $f(x)-x=0$ 有实数根，所以方程 $f(x)-x=0$ 有且只有一个实数根.

北京市朝阳区 2011-2012 学年度高三年级第一学期期末统一考试

数学试卷（文史类）

2012.1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

注意事项：考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上答无效。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.已知集合 $M=\{x\,|\,x<3\}, N=\{x\,|\,\log_2 x>1\}$，则 $M\cap N$ 等于　　（　　）

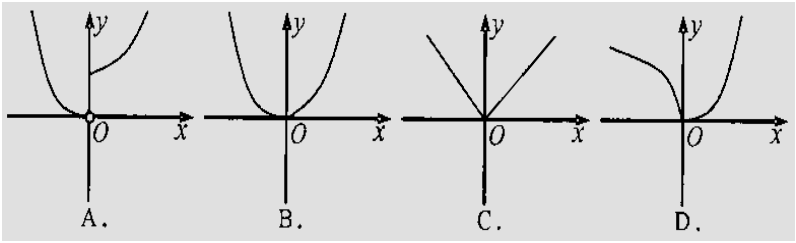
A. ϕ　　B. $\{x\,|\,\frac{1}{2}<x<3\}$

C. $\{x\,|\,0<x<3\}$　　D. $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$， $\boldsymbol{b}=(x,3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值为　　（　　）

A．-9　　B．-1　　C．1　　D．9

3. 函数 $y=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ 2^x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$ 的图象大致是　　（　　）



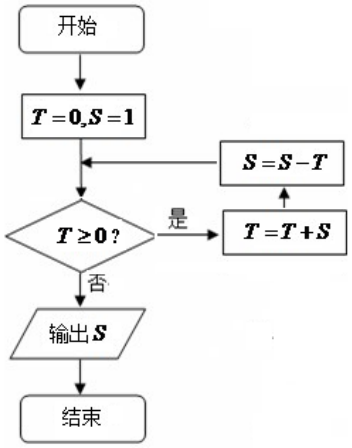
4. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$ 且 a_1,a_3,a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 等于　　（　　）

A．$\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$　　B．$\frac{n^2}{4}+\frac{7n}{4}$　　C．$\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}$　　D．n^2+n

5.执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）

A．1　　B．-1

C．-2　　D．0



6. 函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,3)$　　B．$(1,2)$　　C．$(0,3)$　　D．$(0,2)$

7. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，设 $a=f(\frac{\pi}{7})$，$b=f(\frac{\pi}{6})$，$c=f(\frac{\pi}{3})$，则 a,b,c 的大小关系是　　（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

8. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=m,\ y=3m^2+12,\ m\in\mathbf{Z}\}$．若存在实数 a,b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，称点 (a,b) 为“£”点，则“£”点在平面区域 $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 108\}$ 内的个数是　　（　　）

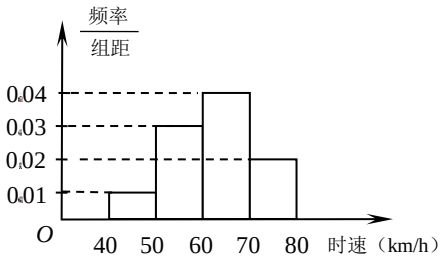
A．0　　B．1　　C．2　　D．无数个

第二部分（非选择题 共 110 分）

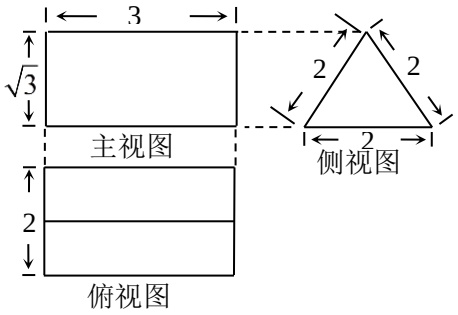
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. 若变量 x， y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq x, \\ 2x+3y \leq 6, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

10. 已知有若干辆汽车通过某一段公路，从中抽取 200 辆汽车进行测速分析，其时速的频率分布直方图如图所示，则时速在区间 $[60,70)$ 上的汽车大约有_____辆.



11. 某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积是_____.



12. 设直线 $x-my-1=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A， B 两点，且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$，则实数 m 的值是_____.

13. 某公司购买一批机器投入生产，据市场分析每台机器生产的产品可获得的总利润 y（万元）与机器运转时间 x（年数， $x \in \mathbf{N}^*$）的关系为 $y=-x^2+18x-25$.则当每台机器运转_____年时，年平均利润最大，最大值是_____万元.

14. 已知两个正数 a,b,可按规则 $c=ab+a+b$ 扩充为一个新数 c,在 a,b,c 三个数中取两个较大的数,按上述规则扩充得到一个新数，依次下去，将每扩充一次得到一个新数称为一次操作.

（1）若 $a=1,b=3$,按上述规则操作三次,扩充所得的数是_____;

（2）若 $p>q>0$，经过 6 次操作后扩充所得的数为 $(q+1)^m(p+1)^n-1$（ m,n 为正整数），则 m,n 的值分别为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本题满分 13 分）

在锐角三角形 ABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 所对的边，且满足 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$，$c=2$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

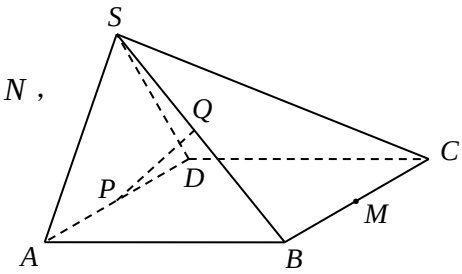
16. （本题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$．四边形 $ABCD$ 为正方形，且 P 为 AD 的中点，Q 为 SB 的中点.

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 SAD；

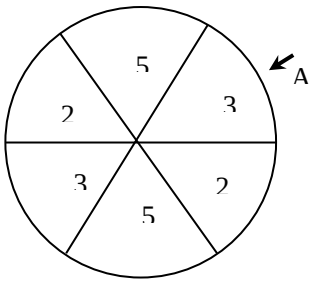
（Ⅱ）求证：$PQ//$ 平面 SCD；

（Ⅲ）若 $SA=SD$，M 为 BC 中点，在棱 SC 上是否存在点 N，使得平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，并证明你的结论.



17. （本题满分 13 分）

如图，一个圆形游戏转盘被分成 6 个均匀的扇形区域．用力旋转转盘，转盘停止转动时，箭头 A 所指区域的数字就是每次游戏所得的分数（箭头指向两个区域的边界时重新转动），且箭头 A 指向每个区域的可能性都是相等的．在一次家庭抽奖的活动中，要求每个家庭派一位儿童和一位成人先后各转动一次游戏转盘，得分记为 (a,b)（假设儿童和成人的得分互不影响，且每个家庭只能参加一次活动）.



（Ⅰ）请列出一个家庭得分 (a,b) 的所有情况；

（Ⅱ）若游戏规定：一个家庭的总得分为参与游戏的两人所得分数之和，且总得分为偶数的家庭可以获得一份奖品．请问一个家庭获奖的概率为多少？

18. （本题满分 13 分）

设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{ax^2}{2}-2x,a\in\mathrm{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时,试求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值;

（Ⅱ）当 $a\geq 0$ 时,试求函数 $f(x)$ 的单调区间.

19. （本题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，且过点 $P(1,\dfrac{3}{2})$，F 为其右焦点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与椭圆相交于 M 、 N 两点（点 M 在 A,N 两点之间），若 $\triangle AMF$ 与 $\triangle MFN$ 的面积相等，试求直线 l 的方程.

20. （本题满分 14 分）

数列 $\{a_n\}$， $\{b_n\}$（ $n=1,2,3,\cdots$ ）由下列条件确定：①$a_1<0,b_1>0$；②当 $k\geq 2$ 时， a_k 与 b_k 满足：当 $a_{k-1}+b_{k-1}\geq 0$ 时， $a_k=a_{k-1},b_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$；当 $a_{k-1}+b_{k-1}<0$ 时， $a_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$， $b_k=b_{k-1}$.

（Ⅰ）若 $a_1=-1$， $b_1=1$，求 a_2， a_3， a_4，并猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（不需要证明）；

（Ⅱ）在数列 $\{b_n\}$ 中，若 $b_1>b_2>\cdots>b_s(s\geq 3$,且 $s\in\mathbf{N}^*)$，试用 a_1,b_1 表示 b_k， $k\in\{1,2,\cdots,s\}$；

（Ⅲ）在（Ⅰ）的条件下，设数列 $\{c_n\}\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $c_1=\dfrac{1}{2}$， $c_n\neq 0$， $c_{n+1}=-\dfrac{2^{2-m}}{ma_m}c_n^{\,2}+c_n$（其中 m 为给定的不小于 2 的整数），求证：当 $n\leq m$ 时，恒有 $c_n<1$.

北京市朝阳区 2011-2012 学年度高三年级第一学期期中统一考试

数学试卷（文史类）答案　　2012.1

一、选择题：

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	D	B	B	A	D	C	B	A

二、填空题：

题号	（9）	（10）	（11）	（12）	（13）		（14）	
答案	$\dfrac{18}{5}$	80	$3\sqrt{3}$	$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	5	8	255	8,13

注：若有两空，则第一个空 3 分，第二个空 2 分.

三、解答题：

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$，

根据正弦定理得：

$\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin A=0$. ……3 分

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……5 分

又B为锐角， 则$B=\dfrac{\pi}{3}$. ……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$B=\dfrac{\pi}{3}$. 因为$b=\sqrt{7}$，$c=2$，

根据余弦定理，得 $7=a^2+4-4a\cos\dfrac{\pi}{3}$， ……8 分

整理，得$a^2-2a-3=0$. 由于$a>0$，得$a=3$. ……10 分

于是$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7+4-9}{4\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$， ……11 分

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=cb\cos A=2\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{7}}{14}=1$. ……13 分

（16）（本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）因为四边形$ABCD$为正方形，则$CD\perp AD$. ……1 分

又平面$SAD\perp$平面$ABCD$，

且面$SAD\cap$面$ABCD=AD$，

所以$CD\perp$平面SAD. ……3 分

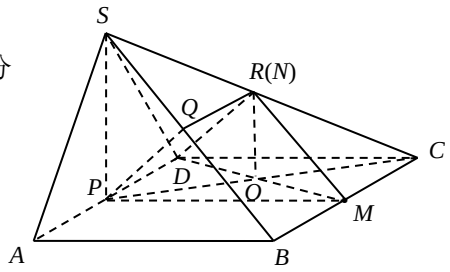
（Ⅱ）取SC的中点R，连QR, DR.

由题意知：$PD/\!/BC$且$PD=\dfrac{1}{2}BC$. ……4 分

在ΔSBC中，Q为SB的中点，R为SC的中点，

所以$QR/\!/BC$且$QR=\dfrac{1}{2}BC$.

所以$QR/\!/PD$且$QR=PD$，



则四边形$PDRQ$为平行四边形. ……7 分

所以$PQ/\!/DR$.又$PQ\not\subset$平面SCD，$DR\subset$平面SCD，

所以$PQ/\!/$平面SCD. ……10 分

（Ⅲ）存在点N为SC中点，使得平面$DMN\perp$平面$ABCD$. ……11 分

连接PC、DM交于点O，连接PM、SP，

因为$PD/\!/CM$，并且$PD=CM$，

所以四边形$PMCD$为平行四边形，所以$PO=CO$.

又因为N为SC中点，

所以$NO/\!/SP$. ……12 分

因为平面$SAD\perp$平面$ABCD$，平面$SAD\cap$平面$ABCD=AD$，并且$SP\perp AD$，

所以 $SP\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $NO\perp$ 平面 $ABCD$， ……13 分

又因为 $NO\subset$ 平面 DMN，

所以平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$. ……14 分

（17）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意可知，一个家庭的得分情况共有 9 种，分别为 $(2,2),(2,3),(2,5),(3,2)$，

$(3,3),(3,5),(5,3),(5,2),(5,5)$. ……7 分

（Ⅱ）记事件 A：一个家庭在游戏中获奖，则符合获奖条件的得分情况包括

$(2,2),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)$ 共 5 种， ……11 分

所以 $P(A)=\frac{5}{9}$.

所以一个家庭获奖的概率为 $\frac{5}{9}$. ……13 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. ……1 分

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}-2x$，因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$， …3 分

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上单调递增，则当 $x=e$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值

$f(e)=1+\frac{e^2}{2}-2e$. ……5 分

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{ax^2-2x+a}{x}$. ……6 分

当 $a=0$ 时,因为 $f'(x)=-2<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；…7 分

当 $a>0$ 时，⑴当 $\Delta=4-4a^2\leq 0$ 时，即 $a\geq 1$ 时，$f'(x)\geq 0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……9 分

⑵当 $\Delta=4-4a^2>0$ 时，即 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)>0$ 解得，

$0<x<\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$，或 $x>\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$. ……10 分

由 $f'(x)<0$ 解得 $\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$； ……11 分

所以当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上单调递增；在

$(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上单调递减，$(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$ 单调递增. ……13 分

（19）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$. ……1 分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，又点 $P(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆上,所以 $\frac{1}{4c^2}+\frac{3}{4c^2}=1$，

解得 $c^2=1$， ……3 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）易知直线 l 的斜率存在,

设 l 的方程为 $y=k(x-4)$， ……5 分

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 整理，得

$(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$， ……6 分

由题意知 $\Delta=(32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$，

解得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$. ……7 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，…… ①，$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$.… ②.

因为 $\triangle AMF$ 与 $\triangle MFN$ 的面积相等，

所以 $|AM|=|MN|$，所以 $2x_1=x_2+4$.…… ③ ……10 分

由①③消去 x_2 得 $x_1=\frac{4+16k^2}{3+4k^2}$.…… ④

将 $x_2=2x_1-4$ 代入②得 $x_1(2x_1-4)=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$.…… ⑤

将④代入⑤ $\frac{4+16k^2}{3+4k^2}(2\times\frac{4+16k^2}{3+4k^2}-4)=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$，

整理化简得$36k^2=5$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{5}}{6}$，经检验成立. ……12 分

所以直线l的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{6}(x-4)$. ……13 分

（20）（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：因为$a_1+b_1=0$，所以$a_2=a_1=-1, b_2=\frac{a_1+b_1}{2}=0$. ……1 分

因为$a_2+b_2=-1<0$,则$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=-\frac{1}{2}, b_3=b_2=0$. ……2 分

$a_4=\frac{a_3+b_3}{2}=\frac{a_3}{2}=-\frac{1}{2^2}$. ……3 分

猜想当$n\geq 2$时，$a_n=a_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=-\frac{1}{2^{n-2}}$.

则$a_n=\begin{cases}-1, & n=1,\\ -\frac{1}{2^{n-2}}, & n\geq 2.\end{cases}$ ……4 分

（Ⅱ）解：当$2\leq k\leq s$时，假设$a_{k-1}+b_{k-1}<0$，根据已知条件则有$b_k=b_{k-1}$，

与$b_1>b_2>\cdots>b_s$矛盾，因此$a_{k-1}+b_{k-1}<0$不成立， ……5 分

所以有$a_{k-1}+b_{k-1}\geq 0$，从而有$a_k=a_{k-1}$，所以$a_k=a_1$. ……6 分

当$a_{k-1}+b_{k-1}\geq 0$时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$,

所以$b_k-a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}-a_{k-1}=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$; ……8 分

当$2\leq k\leq s$时，总有$b_k-a_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$成立.

又$b_1-a_1\neq 0$，

所以$\{b_k-a_k\}(k=1,2,\cdots,s)$是首项为$b_1-a_1$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列， ……9 分

$b_k - a_k = (b_1 - a_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$， $k = 1, 2, \cdots, s$，

又因为$a_k = a_1$，所以$b_k = (b_1 - a_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + a_1$. ……10 分

（III）证明：由题意得$c_{n+1} = -\frac{2^{2-m}}{ma_m}c_n^{\,2} + c_n$

$= \frac{1}{m}c_n^{\,2} + c_n$.

因为$c_{n+1} = \frac{1}{m}c_n^{\,2} + c_n$，所以$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{m}c_n^{\,2} > 0$.

所以数列$\{c_n\}$是单调递增数列. ……11 分

因此要证$c_n < 1 (n \le m)$，只须证$c_m < 1$.

由$m \ge 2$，则$c_{n+1} = \frac{1}{m}c_n^{\,2} + c_n < \frac{1}{m}c_n c_{n+1} + c_n$，即$\frac{1}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_n} > -\frac{1}{m}$. …12 分

因此$\frac{1}{c_m} = (\frac{1}{c_m} - \frac{1}{c_{m-1}}) + (\frac{1}{c_{m-1}} - \frac{1}{c_{m-2}}) + \cdots + (\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}) + \frac{1}{c_1}$

$> -\frac{m-1}{m} + 2 = \frac{m+1}{m}$.

所以$c_m < \frac{m}{m+1} < 1$.

故当$n \le m$,恒有$c_n < 1$. ……14 分

北京房山区 2011-2012 学年 度第一学期期末统测试题

高三数学(文科)

考生须知	1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分, 考试时间为 120 分钟 . 2. 第 I 卷选择题所有答案必须填涂在机读卡上，第 II 卷非选择题直接在试卷上作答. 3. 考试结束后，将机读卡和试卷一并交回.

第 I 卷 选择题(共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项. ）

1．已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, 则 $M\cap N=$（ ）

A. $\{1,2,3\}$ B. $\{1,3,5\}$ C. $\{1,3\}$ D. $\{1,5\}$

2．若 $x\in R$，则“$x>1$”，则“ $x^2>1$”的（ ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分又不必要条件

3. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=2$，则S_7等于（　　）

A. 7　　B. 14　　C. 28　　D. 3.5

4. 已知$a,b\in$R，且$a>b$，则下列不等式中成立的是（　　）

A. $\frac{a}{b}>1$　　B. $a^2>b^2$

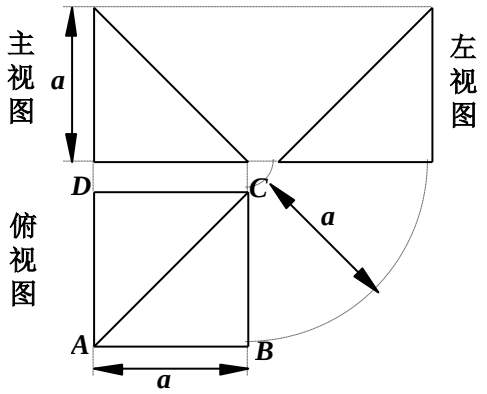
C. $\lg a>\lg b$　　D. $3^a>3^b$

5. 平面上满足约束条件$\begin{cases}x\geq 2,\\ x+y\leq 0,\\ x-y-6\leq 0\end{cases}$的点$(x,y)$形成的区域为$D$，则区域$D$的面积为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知某个几何体的三视图如图所示，根据图中标出的尺寸，可得这个几何体的体积是（　　）

A. $3a^2$　　B. $\frac{1}{3}a^3$　　C. a^3　　D. $\frac{4}{3}a^3$



7.设向量$\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则下列结论中**不正确**的是（　　）

A. $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{4}$

C. $\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{b}$平行　　D. $\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直

8. △ABC中,A=$\frac{\pi}{3}$,BC=3,则△ABC的周长为(　　)

A. $4\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})+3$　　B. $4\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})+3$

C. $6\sin(B+\frac{\pi}{3})+3$　　D. $6\sin(B+\frac{\pi}{6})+3$

第 II 卷　非选择题(共 110 分）

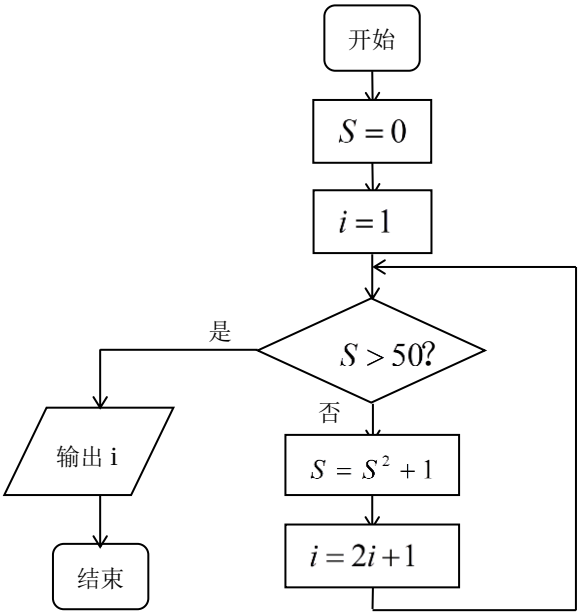
二、填空题:本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题纸上指定位置.

9. 若复数$\frac{1-2i}{1-i}$的实部为a，虚部为b，则$a+b$=_____.

10. 某高校中文、数学、英语、体育四个专业分别有 400、300、150、150 名学生，为了了解学生的就业倾向，用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取n名学生进行调查，其中中文学生抽取了 16 名，则体育专业抽取的学生人数为_____人.

11. 已知圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$，则经过圆C的圆心，且焦点在x轴上的抛物线标准方程是_____.

12. 某程序框图如图所示，该程序运行后输出的值是_____.



13.已知函数$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x\le 0\\ \log_2 x, & x>0\end{cases}$，若$f(x)=2$，则$x=$_____.

14.设函数$f(x)=ax+b$，其中a,b为常数，$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n\in N^*$，若$f_3(x)=8x+21$，则$ab=$_____，$f_n(x)=$_____.

三、解答题：本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+2$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（II）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16.（本小题共 13 分）

编号为 $A_1,A_2,\cdots,A_{16}$ 的 16 名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下：

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

（Ⅰ）将得分在对应区间内的人数填入相应的空格；

区间	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40]$
人数			

（Ⅱ）从得分在区间 $[20,30)$ 内的运动员中随机抽取 2 人，用运动员的编号列出所有可能的抽取结果，并求这 2 人得分之和大于 50 分的概率.

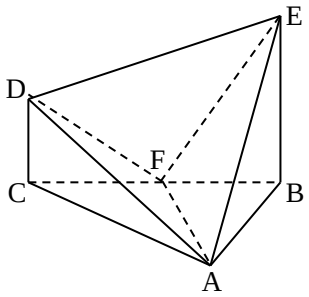
17.（本小题共 13 分）

在几何体 ABCDE 中，∠BAC=$\frac{\pi}{2}$，DC⊥平面 ABC，EB⊥平面 ABC，F 是 BC 的中点，AB=AC=BE=2，CD=1.

（I）求证：DC∥平面 ABE；

（II）求证：AF⊥平面 BCDE；

（III）求几何体 ABCDE 的体积.



18.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+a$，$a\in R$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点（$4,f(4)$）处切线的斜率为 12，求 a 的值；

（II）若 $x\in[0,1]$，求函数 $f(x)$ 的最小值.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{2}{3}$，椭圆 G 上的点 N 到两焦点的距离之和为 12，点 A、B 分别是椭圆 G 长轴的左、右端点，点 F 是椭圆的右焦点．点 P 在椭圆上，且位于 x 轴的上方，$PA\perp PF$．

（I）求椭圆 G 的方程；

（II）求点 P 的坐标；

（III）设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点，M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$，求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值．

20.（本小题共 13 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且满足$a_{n+1}=a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$b_n=4^n+(-1)^{n-1}\lambda\cdot 2^{a_n}$($\lambda$为非零整数，$n\in\mathbf{N}^*$)，试确定$\lambda$的值，使得对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_{n+1}>b_n$成立.

房山区 2012 年高三统练参考答案(数学文科)

单选题

1	[C]		6	[B]
2	[A]		7	[C]
3	[B]		8	[D]
4	[D]			
5	[A]			

二、**填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）.**

9. 1.

10. 6.

11. $y^2 = \frac{1}{2}x$

12. 63.

13. -1或4.

14. $6, 2^n x + 3 \times 2^n - 3$.

三、**解答题：本大题共 6 小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）.**

15.（本小题共 13 分）

解：（I）∵ $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 2$

16.（本小题共 13 分）

解：（I）

区间	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40]$
人数	4	6	6

17.（本小题共 13 分）

证明：(I) ∵DC⊥平面 ABC，EB⊥平面 ABC

∴DC//EB，又∵DC⊄平面 ABE，EB⊂平面 ABE，

∴DC∥平面 ABE ……..4 分

(II) ∵DC⊥平面 ABC，AF⊂平面 ABC

18.（本小题共 14 分）

解:（I） $f(x)$ 的定义域为 R ……1 分

$\because f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+a$ ， $\therefore f'(x)=3x^2-3ax$ ……2 分

19.（本小题共 14 分）

解：（I）∵椭圆 G 上的点 M 到两焦点的距离之和为 12，

$\therefore 2a=12,\ a=6$ ……1 分

$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$

20.（本小题共 13 分）

解：（I）∵ $a_{n+1}=a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$

∴ $a_{n+1}-a_n=1$，$n\in\mathbf{N}^*$ ……2 分