北京市西城区 2011 — 2012 学年度第一学期期末试卷

高三数学（理科）

2012.1

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

2．已知圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$．在以原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，该圆的方程为（　　）

（A）$\rho=2\cos\theta$　　（B）$\rho=2\sin\theta$

（C）$\rho=-2\cos\theta$　　（D）$\rho=-2\sin\theta$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$. 若实数 k 与向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}$ 可以是（　　）

（A）$(\sqrt{3},-1)$　　（B）$(-1,-\sqrt{3})$　　（C）$(-\sqrt{3},-1)$　　（D）$(-1,\sqrt{3})$

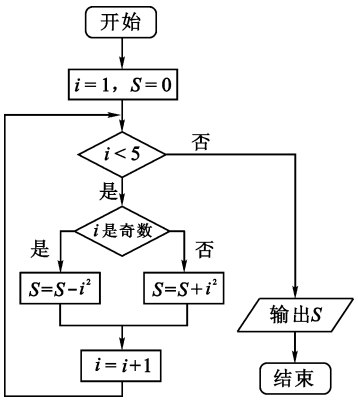
4．执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）

（A）3

（B）-6

（C）10

（D）-15



5．已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x\le 1,\\ y\le 2,\\ 2x+y-2\ge 0,\end{cases}$ 那么 x^2+y^2 的取值范围是（　　）

（A）$[1,4]$　　（B）$[1,5]$

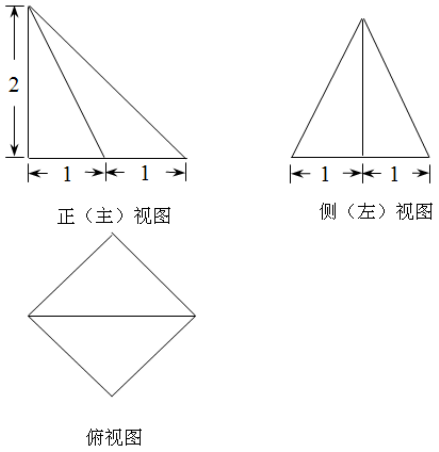
（C）$[\frac{4}{5},4]$　　（D）$[\frac{4}{5},5]$

6．已知$a,b\in\mathbf{R}$．下列四个条件中，使$a>b$成立的必要而不充分的条件是（　　）

（A）$a>b-1$　　（B）$a>b+1$

（C）$|a|>|b|$　　（D）$2^a>2^b$

7．某几何体的三视图如图所示，该几何体的体积是（　　）



（A）8

（B）$\frac{8}{3}$

（C）4

（D）$\frac{4}{3}$

8．已知点$A(-1,-1)$．若曲线G上存在两点B,C，使$\triangle ABC$为正三角形，则称G为Γ型曲线．给定下列三条曲线：

① $y=-x+3\,(0\le x\le 3)$；　② $y=\sqrt{2-x^2}\,(-\sqrt{2}\le x\le 0)$；　③ $y=-\frac{1}{x}\,(x>0)$．

其中，Γ型曲线的个数是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

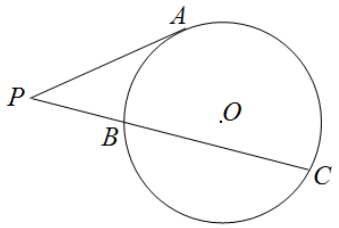
第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}$ 的定义域是_____.

10. 若双曲线 $x^2-ky^2=1$ 的一个焦点是 $(3,0)$，则实数 $k=$_____.

11. 如图，PA 是圆 O 的切线，A 为切点，PBC 是圆 O 的割线. 若 $\dfrac{PA}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{PB}{BC}=$_____.



12. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，若 $a_3-a_1=6$，则 $a_1=$_____；

$\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}=$_____.

13. 在△ ABC 中，三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 若 $b=2\sqrt{5}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $c=$_____；$a=$_____.

14. 有限集合 P 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(P)$. 已知 $\mathrm{card}(M)=10$，$A\subseteq M$，$B\subseteq M$，$A\cap B=\varnothing$，且 $\mathrm{card}(A)=2$，$\mathrm{card}(B)=3$. 若集合 X 满足 $A\subseteq X\subseteq M$，则集合 X 的个数是_____；若集合 Y 满足 $Y\subseteq M$，且 $A\not\subset Y$，$B\not\subset Y$，则集合 Y 的个数是_____.（用数字作答）

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$， $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16.（本小题满分 13 分）

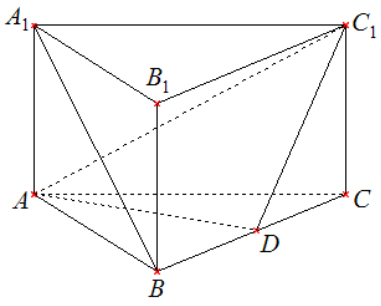
盒中装有 7 个零件，其中 2 个是使用过的，另外 5 个未经使用.

（Ⅰ）从盒中每次随机抽取 1 个零件，每次观察后都将零件放回盒中，求 3 次抽取中恰有 1 次抽到使用过的零件的概率；

（Ⅱ）从盒中随机抽取 2 个零件，使用后放回盒中，记此时盒中使用过的零件个数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

17.（本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=2AA_1$，$\angle ABC=90^\circ$，D 是 BC 的中点.



（Ⅰ）求证：A_1B // 平面 ADC_1；

（Ⅱ）求二面角 C_1-AD-C 的余弦值；

（Ⅲ）试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E，使 AE 与 DC_1 成 60° 角？若存在，确定 E 点位置，若不存在，说明理由.

18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$，且离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设经过点 F 的直线交椭圆 C 于 M,N 两点，线段 MN 的垂直平分线交 y 轴于点 $P(0,y_0)$，求 y_0 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}ax^2-\ln(1+x)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值是 0，求 a 的取值范围.

20.（本小题满分 13 分）

已知数列 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n$. 如果数列 $B_n:b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足 $b_1=a_n$，$b_k=a_{k-1}+a_k-b_{k-1}$，其中 $k=2,3,\cdots,n$，则称 B_n 为 A_n 的“衍生数列”.

（Ⅰ）若数列 $A_4:a_1,a_2,a_3,a_4$ 的“衍生数列”是 $B_4:5,-2,7,2$，求 A_4；

（Ⅱ）若 n 为偶数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n，证明：B_n 的“衍生数列”是 A_n；

（Ⅲ）若 n 为奇数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n，B_n 的“衍生数列”是 C_n，….依次将数列 A_n，B_n，C_n，…的第 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 项取出，构成数列 $\Omega_i:a_i,b_i,c_i,\cdots$.

证明：Ω_i 是等差数列.

北京市西城区 2011 — 2012 学年度第一学期期末

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2012.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A； 2. B； 3. D； 4. C； 5. D； 6. A； 7. D； 8. C .

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\{x\,|\,0<x<1$，或 $x>1\}$； 10. $\frac{1}{8}$； 11. $\frac{1}{2}$；

12. 2， $\frac{1}{3}(1-4^{-n})$； 13. $2\sqrt{2}$， 6； 14. 256， 672 .

注：12、13、14 题第一问 2 分，第二问 3 分；9 题结论正确但表示形式非集合，扣 1 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解法一：

（Ⅰ）解：令 $f(x)=0$，得 $\sin x\cdot(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$， ……1 分

所以 $\sin x=0$，或 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……3 分

由 $\sin x=0$， $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，得 $x=\pi$； ……4 分

由 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$， $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$. ……5 分

综上，函数 $f(x)$ 的零点为 $\frac{5\pi}{6}$ 或 π.

（Ⅱ）解： $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……8 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$. ……9 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$； ……11 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……13 分

解法二：

（Ⅰ）解：$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……3 分

令 $f(x)=0$，得 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……4 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$. ……5 分

所以，当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，或 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ 时，$f(x)=0$. ……7 分

即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 或 $x=\pi$ 时，$f(x)=0$.

综上，函数 $f(x)$ 的零点为 $\frac{5\pi}{6}$ 或 π. ……9 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可知，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$； ……11 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{11\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……13 分

16.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：记“从盒中随机抽取1个零件，抽到的是使用过的零件”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{2}{7}$. ……2 分

所以3次抽取中恰有1次抽到使用过的零件的概率 $P=C_3^1(\frac{2}{7})(\frac{5}{7})^2=\frac{150}{343}$. ……5 分

（Ⅱ）解：随机变量 X 的所有取值为 $2,3,4$. ……7 分

$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{2}$；　　$P(X=3)=\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{10}{21}$；

$P(X=4)=\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}$. ……10 分

所以，随机变量 X 的分布列为：

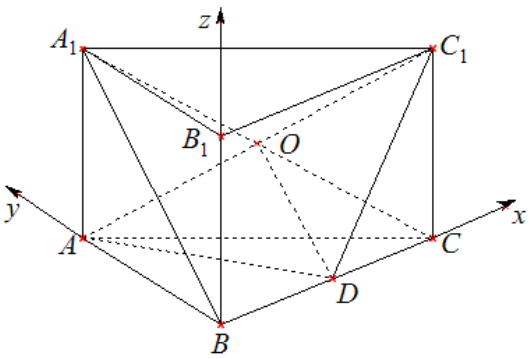
X	2	3	4
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$

……11 分

$EX=2\times\frac{1}{21}+3\times\frac{10}{21}+4\times\frac{10}{21}=\frac{24}{7}$. ……13 分

17.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：连结 A_1C，交 AC_1 于点 O，连结 OD.



由 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

得 四边形 ACC_1A_1 为矩形，O 为 A_1C 的中点.

又 D 为 BC 中点，所以 OD 为 $\triangle A_1BC$ 中位线，

所以 $A_1B\ //\ OD$， ……2 分

因为 $OD\subset$ 平面 ADC_1，$A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1，

所以 $A_1B\ //$ 平面 ADC_1. ……4 分

（Ⅱ）解：由 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，且 $\angle ABC=90^\circ$，故 BA,BC,BB_1 两两垂直.

如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$. ……5 分

设 $BA=2$，则 $B(0,0,0),C(2,0,0),A(0,2,0),C_1(2,0,1),D(1,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{AD}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(2,-2,1)$

设平面 ADC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AC_1}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x-2y=0,\\ 2x-2y+z=0.\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$. ……7 分

易知平面 ADC 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(0,0,1)$. ……8 分

由二面角 C_1-AD-C 是锐角，得 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{2}{3}$. ……9 分

所以二面角 C_1-AD-C 的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

（Ⅲ）解：假设存在满足条件的点 E.

因为 E 在线段 A_1B_1 上，$A_1(0,2,1)$，$B_1(0,0,1)$，故可设 $E(0,\lambda,1)$，其中 $0\le\lambda\le2$.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,\lambda-2,1)$，$\overrightarrow{DC_1}=(1,0,1)$. ……11 分

因为 AE 与 DC_1 成 60° 角，所以 $\left|\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC_1}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{DC_1}|}\right|=\frac{1}{2}$. ……12 分

即 $\left|\frac{1}{\sqrt{(\lambda-2)^2+1}\cdot\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}$，解得 $\lambda=1$，舍去 $\lambda=3$. ……13 分

所以当点 E 为线段 A_1B_1 中点时，AE 与 DC_1 成 60° 角. ……14 分

18.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：设椭圆 C 的半焦距是 c. 依题意，得 $c=1$. ……1 分

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，

所以 $a=2c=2$，$b^2=a^2-c^2=3$. ……3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）解：当 $MN\perp x$ 轴时，显然 $y_0=0$. ……5 分

当 MN 与 x 轴不垂直时，可设直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$.

……7 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，线段 MN 的中点为 $Q(x_3,y_3)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$. ……8 分

所以 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，$y_3=k(x_3-1)=\frac{-3k}{3+4k^2}$.

线段 MN 的垂直平分线方程为 $y+\frac{3k}{3+4k^2}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4k^2}{3+4k^2})$.

在上述方程中令 $x=0$，得 $y_0=\frac{k}{3+4k^2}=\frac{1}{\frac{3}{k}+4k}$. ……10 分

当 $k<0$ 时，$\frac{3}{k}+4k\leq -4\sqrt{3}$；当 $k>0$ 时，$\frac{3}{k}+4k\geq 4\sqrt{3}$.

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{12}\leq y_0<0$，或 $0<y_0\leq\frac{\sqrt{3}}{12}$. ……12 分

综上，y_0 的取值范围是 $[-\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{3}}{12}]$. ……13 分

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：$f'(x)=\dfrac{x(1-a-ax)}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$. ……2 分

依题意，令 $f'(2)=0$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$. ……3 分

经检验，$a=\dfrac{1}{3}$时，符合题意. ……4 分

（Ⅱ）解：① 当$a=0$时，$f'(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

故 $f(x)$ 的单调增区间是$(0,+\infty)$；单调减区间是$(-1,0)$. ……5 分

② 当$a>0$时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，或 $x_2=\dfrac{1}{a}-1$.

当$0<a<1$时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘

所以，$f(x)$ 的单调增区间是$(0,\dfrac{1}{a}-1)$；单调减区间是$(-1,0)$和$(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$. …6 分

当$a=1$时，$f(x)$ 的单调减区间是$(-1,+\infty)$. ……7 分

当$a>1$时，$-1<x_2<0$，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-1,x_2)$	x_2	(x_2,x_1)	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(x_1)$	↘

所以，$f(x)$ 的单调增区间是$(\dfrac{1}{a}-1,0)$；单调减区间是$(-1,\dfrac{1}{a}-1)$和$(0,+\infty)$. …8 分

③ 当$a<0$时，$f(x)$ 的单调增区间是$(0,+\infty)$；单调减区间是$(-1,0)$. ……9 分

综上，当$a\le 0$时，$f(x)$ 的增区间是$(0,+\infty)$，减区间是$(-1,0)$；

当$0<a<1$时，$f(x)$ 的增区间是$(0,\dfrac{1}{a}-1)$，减区间是$(-1,0)$和$(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$；

当$a=1$时，$f(x)$ 的减区间是$(-1,+\infty)$；

当$a>1$时，$f(x)$ 的增区间是$(\dfrac{1}{a}-1,0)$；减区间是$(-1,\dfrac{1}{a}-1)$和$(0,+\infty)$.

……10 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(0)=0$，知不合题意.

……11 分

当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值是 $f(\frac{1}{a}-1)$，

由 $f(\frac{1}{a}-1)>f(0)=0$，知不合题意. ……12 分

当 $a\ge 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

可得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值是 $f(0)=0$，符合题意.

所以， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值是 0 时，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. ……14 分

20.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：$A_4:2,1,4,5$. ……3 分

（Ⅱ）证法一：

证明：由已知，$b_1=a_1-(a_1-a_n)$，$b_2=a_1+a_2-b_1=a_2+(a_1-a_n)$.

因此，猜想 $b_i=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)$. ……4 分

① 当 $i=1$ 时， $b_1=a_1-(a_1-a_n)$，猜想成立；

② 假设 $i=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时， $b_k=a_k+(-1)^k(a_1-a_n)$.

当 $i=k+1$ 时， $b_{k+1}=a_k+a_{k+1}-b_k$

$$=a_k+a_{k+1}-[a_k+(-1)^k(a_1-a_n)]$$

$$=a_k+a_{k+1}-a_k-(-1)^k(a_1-a_n)$$

$$=a_{k+1}+(-1)^{k+1}(a_1-a_n)$$

故当 $i=k+1$ 时猜想也成立.

由 ①、② 可知，对于任意正整数 i，有 $b_i=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)$. ……7 分

设数列 B_n 的“衍生数列”为 C_n，则由以上结论可知

$c_i=b_i+(-1)^i(b_1-b_n)=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)+(-1)^i(b_1-b_n)$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n$.

由于 n 为偶数，所以 $b_n = a_n + (-1)^n(a_1 - a_n) = a_1$，

所以 $c_i = a_i + (-1)^i(a_1 - a_n) + (-1)^i(a_n - a_1) = a_i$，其中 $i = 1,2,3,\cdots,n$.

因此，数列 C_n 即是数列 A_n. ……9 分

证法二：

因为 $b_1 = a_n$，

$b_1 + b_2 = a_1 + a_2$，

$b_2 + b_3 = a_2 + a_3$，

……

$b_{n-1} + b_n = a_{n-1} + a_n$，

由于 n 为偶数，将上述 n 个等式中的第 $2,4,6,\cdots,n$ 这 $\frac{n}{2}$ 个式子都乘以 -1，相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \cdots - (b_{n-1} + b_n) = a_n - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \cdots - (a_{n-1} + a_n)$$

即 $-b_n = -a_1$， $b_n = a_1$. ……7 分

由于 $a_1 = b_n$， $a_i = b_{i-1} + b_i - a_{i-1}\ (i = 2,3,\cdots,n)$，

根据“衍生数列”的定义知，数列 A_n 是 B_n 的“衍生数列”. ……9 分

（Ⅲ）证法一：

证明：设数列 X_n, Y_n, Z_n 中后者是前者的“衍生数列”. 欲证 Ω_i 成等差数列，只需证明 x_i, y_i, z_i 成等差数列，即只要证明 $2y_i = x_i + z_i\ (i = 1,2,3,\cdots,n)$ 即可. ……10 分

由（Ⅱ）中结论可知 $y_i = x_i + (-1)^i(x_1 - x_n)$，

$$\begin{aligned} z_i &= y_i + (-1)^i(y_1 - y_n) \\ &= x_i + (-1)^i(x_1 - x_n) + (-1)^i(y_1 - y_n) \\ &= x_i + (-1)^i(x_1 - x_n) + (-1)^i[x_n - x_n - (-1)^n(x_1 - x_n)] \\ &= x_i + (-1)^i(x_1 - x_n) + (-1)^i(x_1 - x_n) \\ &= x_i + 2(-1)^i(x_1 - x_n)， \end{aligned}$$

所以， $x_i + z_i = 2x_i + 2(-1)^i(x_1 - x_n) = 2y_i$， 即 x_i, y_i, z_i 成等差数列，

所以Ω_i是等差数列. ……13分

证法二：

因为 $b_i = a_{i-1} + a_i - b_{i-1}\ (i = 2,3,4,\cdots,n)$，

所以 $b_i - a_i = -(b_{i-1} - a_{i-1})\ (i = 2,3,4,\cdots,n)$.

所以欲证Ω_i成等差数列，只需证明Ω_1成等差数列即可. ……10分

对于数列A_n及其“衍生数列”B_n，

因为 $b_1 = a_n$，

$b_1 + b_2 = a_1 + a_2$，

$b_2 + b_3 = a_2 + a_3$，

……

$b_{n-1} + b_n = a_{n-1} + a_n$，

由于n为奇数，将上述n个等式中的第$2,4,6,\cdots,n-1$这$\frac{n-1}{2}$个式子都乘以-1，

相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \cdots + (b_{n-1} + b_n) = a_n - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \cdots + (a_{n-1} + a_n)$$

即$b_n = a_n - a_1 + a_n = 2a_n - a_1$.

设数列B_n的“衍生数列”为C_n，

因为 $b_1 = a_n$， $c_1 = b_n = 2a_n - a_1$，

所以 $2b_1 = a_1 + c_1$， 即a_1, b_1, c_1成等差数列.

同理可证，$b_1, c_1, d_1; c_1, d_1, e_1, \cdots$也成等差数列.

即 Ω_1是等差数列.

所以 Ω_i成等差数列. ……13分

北京市通州区2012届高三上学期期末摸底考试

数学（理科）试卷

2012年1月

本试卷分第I卷和第II卷两部分，第I卷第1至2页，第II卷2至4页，共150分．考试时间长120分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试题卷上作答无效．考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷 （选择题 共40分）

一、本大题共8个小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．把正确答案选项的标号填涂在答题卡上.

1．已知集合$A=\{x|x-1<0\}$，$B=\{x|x<-1,或x>2\}$，那么$A\cup B$等于

A．$\{x|x<-1\}$　　B．$\{x|x<1\}$

C．$\{x|x<-1,或x>2\}$　　D．$\{x|x<1,或x>2\}$

2．复数$\dfrac{1-i}{1+i}$等于

A．-1　　B．$-i$　　C．1　　D．i

3．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，且$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，那么$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$等于

A．$(4,0)$　　B．$(0,4)$　　C．$(4,-8)$　　D．$(-4,8)$

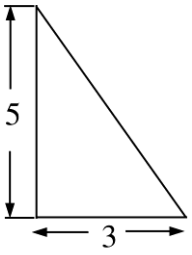
4．已知右图中的三个直角三角形是一个几何体的三视图，那么这个几何体的体积等于

A．30

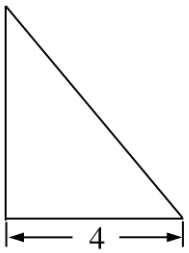
B．20

C．15

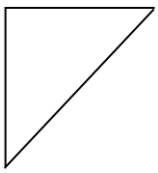
D．10



正视图



侧视图

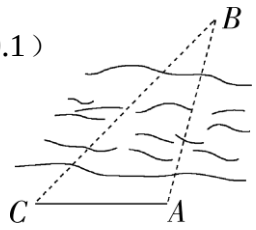

俯视图

5．已知$a,b\in\mathbf{R}$，那么“$\log_{\frac{1}{2}}a>\log_{\frac{1}{2}}b$”是“$3^a<3^b$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．如右图，设 A，B 两点在河的两岸，一测量者在 A 的同侧，在所在的河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离为 $50m$，$\angle ACB=45°$，$\angle CAB=105°$ 后，就可以计算出 A，B 两点的距离为（其中 $\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$，精确到 0.1）



A．70.7m　　B．78.7m

C．86.6m　　D．90.6m

7．过圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 上一点 $M(3,-1)$ 的切线方程是

A．$2x-y-7=0$　　B．$2x+y-5=0$　　C．$x+2y-1=0$

D．$x-2y-5=0$

8．当 $x\in(3,4)$ 时，不等式 $\log_a(x-2)+(x-3)^2<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C．$(1,2]$　　D．$[2,+\infty)$

第Ⅱ卷　（非选择题　共 110 分）

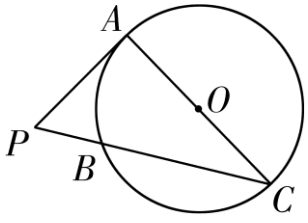
二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡相应的位置上.

9．在二项式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，含 x^4 的项的系数是_____.

10．已知 x，y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 3,\\ x-y\geqslant -1,\\ x-3\leqslant 0,\end{cases}$ 那么 $z=x+2y$ 的最小值是_____.

11．如图，已知 PA 是圆 O 的切线，切点为 A，AC 是圆 O 的直径，PC 与圆 O 交于点 B，$PA=4$，圆 O 的半径是 $2\sqrt{3}$，

那么 $PB=$_____.



12．已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，且 $a_1+a_2=1$，$a_2\cdot a_3=10$，那么数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项的和 $S_5=$_____.

13．下面四个命题：

①已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, x<0,\end{cases}$ 且 $f(a)+f(4)=4$，那么 $a=-4$；

②一组数据 18，21，19，a，22 的平均数是 20，那么这组数据的方差是 2；

③已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，且 $f(-1)=0$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集 $\{x|x<-1\}$；

④在极坐标系中，圆 $\rho=-4\cos\theta$ 的圆心的直角坐标是 $(-2,0)$.

其中正确的是_____.

14. 直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于不同的两点 M，N，过点 M，N 作 x 轴的垂线，垂足恰好是椭圆的两个焦点，已知椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l 的斜率存在且不为 0，那么直线 l 的斜率是_____.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分.解答题写出文字说明,演算步骤或证明过程.

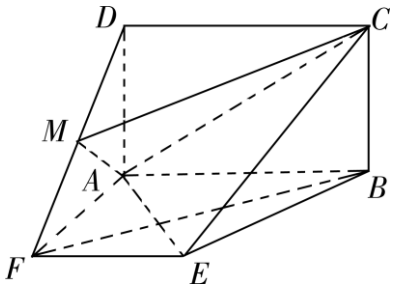
15.（本小题共 13 分）已知函数 $f(x)=\sin(\pi-2x)+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16.（本小题共 13 分）如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，$BC\perp$ 平面 $ABEF$，四边形 $ABEF$ 是梯形，$\angle EFA=\angle FAB=90^\circ$，$EF=FA=AD=\frac{1}{2}AB=1$，点 M 是 DF 的中点.

（Ⅰ）求证：BF // 平面 AMC；



（Ⅱ）求二面角 $B-AC-E$ 的余弦值.

17.（本小题共 13 分）有甲、乙等 7 名选手参加一次讲演比赛，采用抽签的方式随机确定每名选手的演出顺序（序号为 1，2，…，7）.

（Ⅰ）甲选手的演出序号是 1 的概率；

（Ⅱ）求甲、乙两名选手的演出序号至少有一个为奇数的概率；

（Ⅲ）求甲、乙两名选手之间的演讲选手个数 X 的分布列与期望.

18.（本小题共 13 分）已知函数 $f(x)=ax\ln x$，在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $4x-y=0$ 平行.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[m, m+2](m>0)$ 上的最小值.

19.（本小题共 14 分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a$，$a_2=2$，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$2S_n=n(3a_1+a_n)$，$n\in N^*$.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）若$b_n=\begin{cases}2 & (n=1),\\ \dfrac{8}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}} & (n\geqslant 2),\end{cases}$ T_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，

且$a_{n+2}\cdot T_n<m\cdot a_{n+2}^2+2$对一切$n\in N^*$都成立，求实数$m$取值范围.

20.（本小题共 14 分）已知抛物线$C:x^2=ay(a>0)$，斜率为 k 的直线 l 经过抛物线的焦点 F，交抛物线于 A，B 两点，且抛物线上一点$M(2\sqrt{2},m)\ (m>1)$到点 F 的距离是 3.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）若 $k>0$，且$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，求 k 的值.

（Ⅲ）过 A，B 两点分别作抛物线的切线，这两条切线的交点为点 Q，求证：$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{FQ}=0$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在实体卷上作答无效）

摸底考试参考答案

2012、1

一、选择题

1．D　2．B　3．C　4．D　5．A　6．A　7．B　8．B

二、填空题

9．6　　10．3　　11．2　　12．25

13．②，④　　14．$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题

15．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin(\pi-2x)+2\cos^2 x-1$，

所以 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$．　……..　3 分

所以 $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　……..　5 分

又因为 $-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

所以 $-\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$．

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π；最大值是 $\sqrt{2}$．　……..　7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{3\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{4}$．　……..　9 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值是1；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{8}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值是 $-\sqrt{2}$．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值是1，最小值是 $-\sqrt{2}$ ……　13 分

16．（Ⅰ）证明：连结 BD，交 AC 于点 G，∴点 G 是 BD 的中点.

∵点 M 是 DF 的中点，

∴ MG 是 ΔBDF 的中位线.　　∴ $BF // MG.$

∵ $MG \subset$ 平面 AMC，$BF \not\subset$ 平面 AMC，

∴ $BF //$ 平面 AMC ..…….. 5 分

（Ⅱ）解：以 A 为原点，以 AF，AB，AD 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.

…….. 4 分

∴ $A(0,0,0)$，$C(0,2,1)$，$E(1,1,0)$，$F(1,0,0)$，

∴ $\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AF}=(1,0,0).$

设平面 ACE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

∴ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.

∴ $\begin{cases}2y+z=0\\ x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=2$.

∴ $\vec{n}=(1,-1,2).$

又 $\overrightarrow{AF}$ 是平面 ACB 的法向量，

∴ $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}\times1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}.$　如图所示，二面角 $B-AC-E$ 为锐角.

∴二面角 $B-AC-E$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}.$　　…….. 13 分

17. 解：（Ⅰ）设 A 表示“甲选手的演出序号是 1”，

所以 $P(A)=\dfrac{1}{7}.$

所以甲选手的演出序号是 1 的概率为 $\dfrac{1}{7}.$　　…….. 3 分

（Ⅱ）设 B 表示“甲、乙两名选手的演出序号至少有一个为奇数”，

$\overline{B}$ 表示“甲、乙两名选手的演出序号都是偶数”.

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{A_3^2}{A_7^2}=\dfrac{6}{7}.$

所以甲、乙两名选手的演出序号至少有一个为奇数的概率为$\frac{6}{7}$.…….. 6 分

（Ⅲ） X 的可能取值为0，1，2，3，4，5，…….. 7 分

所以$P(X=0)=\frac{12}{A_7^2}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{10}{A_7^2}=\frac{5}{21}$，$P(X=2)=\frac{8}{A_7^2}=\frac{4}{21}$，

$P(X=3)=\frac{6}{A_7^2}=\frac{1}{7}$，$P(X=4)=\frac{4}{A_7^2}=\frac{2}{21}$，$P(X=5)=\frac{2}{A_7^2}=\frac{1}{21}$…….. 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

…….. 12 分

所以$EX=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{4}{21}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{2}{21}+5\times\frac{1}{21}=\frac{5}{3}.$

…….. 13 分

18．解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=ax\ln x$，

所以定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a(\ln x+1)$.…….. 2 分

因为在点$(e,f(e))$处的切线与直线$4x-y=0$平行，

所以 $f'(e)=4$，即$a(\ln e+1)=4$.…….. 4 分

所以$a=2.$

所以 $f(x)=2x\ln x.$…….. 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ） $f'(x)=2(\ln x+1)$，令 $f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{e}$.

当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减；

当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增.

所以①若$\frac{1}{e}\in(m,m+2)$时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(\frac{1}{e})=-\frac{2}{e}$；

②若$\frac{1}{e}\le m<m+2$时，函数 $f(x)$在$[m,m+2]$上单调递增，所以函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(m)=2m\ln m.$…….. 13 分

19．解：（Ⅰ）因为$2S_n=n(3a_1+a_n)$，$S_1=a_1=a$，

所以$a=0.$ …….. 3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $S_n=\frac{na_n}{2}$， 所以$S_{n+1}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{2}.$

所以$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)a_{n+1}}{2}-\frac{na_n}{2}.$

所以$(n-1)a_{n+1}=na_n.$

所以当$n\geq 2$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}.$

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2},,\ \cdots,\ \frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1},$

所以$\frac{a_{n+1}}{a_2}=n.$

所以$a_n=2(n-1)$， $n\geq 2$.

因为$a_1=a=0$满足上式，

所以$a_n=2(n-1)$， $n\in N^*$…….. 6 分

（Ⅲ）当$n\geq 2$时，$b_n=\frac{8}{2n\cdot 2(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$…….. 7 分

又$b_1=2,$

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ …….. 9 分

$=2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{3n+1}{n+1}$

所以$T_n=\frac{3n+1}{n+1}.$ …….. 10 分

因为$a_{n+2}\cdot T_n<m\cdot a_{n+2}^2+2$对一切$n\in N^*$都成立，

即 $2(n+1)\cdot\dfrac{3n+1}{n+1}<m\cdot4(n+1)^2+2$ 对一切 $n\in N^*$ 都成立.

所以 $m>\dfrac{3}{2}.\dfrac{n}{n^2+2n+1}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}+2}$. …….. 12 分

因为 $n+\dfrac{1}{n}\geq2$，当且仅当 $n=\dfrac{1}{n}$，即 $n=1$ 时等号成立.

所以 $n+\dfrac{1}{n}+2\geq4$.

所以 $\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}+2}\leq\dfrac{1}{4}$

所以 $m>\dfrac{3}{8}$. …….. 14 分

20. 解：（Ⅰ）因为点 $M\left(2\sqrt{2},m\right)$ 在抛物线 $C:x^2=ay(a>0)$ 上，

所以 $am=8$.

因为点 $M\left(2\sqrt{2},m\right)$ 到抛物线的焦点 F 的距离是 3，

所以点 $M\left(2\sqrt{2},m\right)$ 到抛物线的准线 $y=-\dfrac{a}{4}$ 的距离是 3.

所以 $m+\dfrac{a}{4}=3.$

所以 $\dfrac{8}{a}+\dfrac{a}{4}=3.$

所以 $a=4$，或 $a=8.$ …….. 3 分

因为 $m>1$，

所以 $a=4$. .. 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $x^2=4y.$

因为直线 l 经过点 $T(0,1)$，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$

所以直线 l 的斜率一定存在，设直线 l 的斜率是 k.

所以直线 l 的方程是 $y=kx+1$，即 $kx-y+1=0$.

所以联立方程组 $\begin{cases}kx-y+1=0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-4kx-4=0.$…….. 5 分

所以 $x_{1,2}=\dfrac{4k\pm\sqrt{16k^2+16}}{2}=2k\pm2\sqrt{k^2+1}.$

因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，且$k>0$

所以$2k+2\sqrt{k^2+1}=3\cdot\left(2\sqrt{k^2+1}-2k\right).$…….. 7 分

所以$\sqrt{k^2+1}=2k.$

所以$k^2=\frac{1}{3}.$

所以$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍负）

所以k的值是$\frac{\sqrt{3}}{3}.$…….. 8 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，方程组$\begin{cases}kx-y+1=0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得$x^2-4kx-4=0.$

设$A\left(x_1,y_1\right)$， $B\left(x_2,y_2\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)=\left(x_2-x_1,k\left(x_2-x_1\right)\right).$…….. 9 分

由$x^2=4y$，所以$y=\frac{1}{4}x^2.$

所以$y'=\frac{1}{2}x.$

所以切线QA的方程是$y-y_1=\frac{1}{2}x_1\left(x-x_1\right)$，

切线QB的方程是$y-y_2=\frac{1}{2}x_2\left(x-x_2\right).$…….. 11 分

所以点Q的坐标是$\left(2k,-1\right)$，

所以$\overrightarrow{FQ}=\left(2k,-2\right).$

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FQ}=0.$ ……..

14 分

海淀区 2011-2012 学年度高三年级第一学期期末练习

数 学（理科）

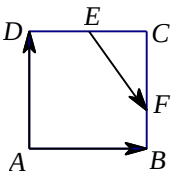
2012.01

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）复数 $\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}=$ （　　）

（A）$2-\mathrm{i}$　　（B）$\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　（C）$10-5\mathrm{i}$　　（D）$\dfrac{10}{3}-\dfrac{5}{3}\mathrm{i}$

（2）如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 DC 的中点，点 F 是 BC 的一个三等分点.那么 $\overrightarrow{EF}=$



（A）$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　（B）$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

（C）$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$　　（D）$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

（3）若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=19$，$a_{n+1}=a_n-3(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和数值最大时，n 的值是

（A）6　　（B）7　　（C）8　　（D）9

（4）已知平面 α，β，直线 l，若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，则

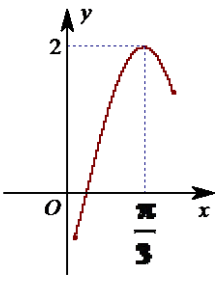
（A）垂直于平面 β 的平面一定平行于平面 α

（B）垂直于直线 l 的直线一定垂直于平面 α

（C）垂直于平面 β 的平面一定平行于直线 l

（D）垂直于直线 l 的平面一定与平面 α，β 都垂直

（5）函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A,\varphi\in\mathbf{R})$ 的部分图象如图所示，那么 $f(0)=$ （　　）



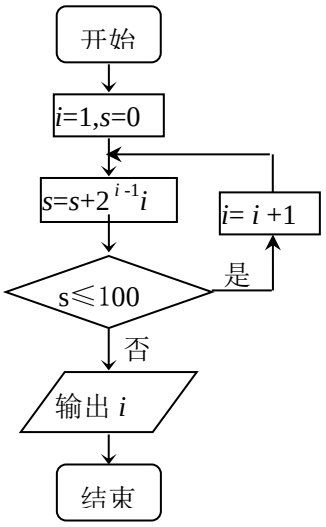
（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（C）-1　　（D）$-\sqrt{3}$

（6）执行如图所示的程序框图，输出的 i 值为（　　）

（A）5　　（B）6

（C）7　　（D）8



（7）已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sin x$，那么下列命题中**假命题**是（　　）

（A） $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数　　（B） $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上恰有一个零点

（C） $f(x)$ 是周期函数　　（D） $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$ 上是增函数

（8）点 P 到图形 C 上每一个点的距离的最小值称为点 P 到图形 C 的距离，那么平面内到定圆 C 的距离与到定点 A 的距离相等的点的轨迹不可能是（　　）

（A）圆　　（B）椭圆

（C）双曲线的一支　　（D）直线

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分，把答案填在题中横线上.

（9）$(\sqrt{x}+1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数是_____.（用数字作答）

（10）若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-4\le 0,\\ x-y-2\le 0,\\ 2x+y-5\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为_____.

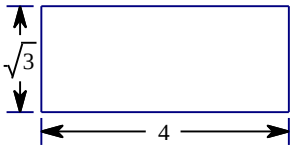
（11）抛物线 $x^2=ay$ 过点 $A(1,\frac{1}{4})$，则点 A 到此抛物线的焦点的距离为_____.

（12）甲和乙两个城市去年上半年每月的平均气温（单位：℃）用茎叶图记录如下，根据茎叶图可知，两城市中平均温度较高的城市是_____，气温波动较大的城市是_____.

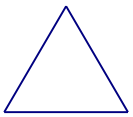
甲城市				乙城市		
		9	0			
8	7	7	3	1	2	4	7
			2	2	0	4	7

（13）已知圆C：$(x-1)^2+y^2=2$，过点$A(-1,0)$的直线l将圆C分成弧长之比为$1:3$的两段圆弧，则直线l的方程为_____.

（14）已知正三棱柱$ABC-A'B'C'$的正（主）视图和侧（左）视图如图所示. 设$\Delta ABC,\Delta A'B'C'$的中心分别是O,O'，现将此三棱柱绕直线OO'旋转，射线OA旋转所成的角为x弧度（x可以取到任意一个实数），对应的俯视图的面积为$S(x)$，则函数$S(x)$的最大值为_____；最小正周期为_____. $8,\frac{\pi}{3}$



正（主）视图


侧（左）视图

说明：“三棱柱绕直线OO'旋转”包括逆时针方向和顺时针方向，逆时针方向旋转时，OA旋转所成的角为正角，顺时针方向旋转时，OA旋转所成的角为负角.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 13 分）

在ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$A=2B$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅰ）求$\cos A$及$\sin C$的值；

（Ⅱ）若$b=2$，求ΔABC的面积.

(16)（本小题满分 13 分）

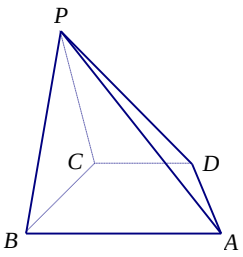
为加强大学生实践、创新能力和团队精神的培养，促进高等教育教学改革，教育部门主办了全国大学生智能汽车竞赛. 该竞赛分为预赛和决赛两个阶段，参加决赛的队伍按照抽签方式决定出场顺序.通过预赛，选拔出甲、乙等五支队伍参加决赛.

（Ⅰ）求决赛中甲、乙两支队伍恰好排在前两位的概率；

（Ⅱ）若决赛中甲队和乙队之间间隔的队伍数记为X，求X的分布列和数学期望.

(17)（本小题满分 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，AB // CD，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=PB=PC=BC=2CD$，平面 PBC ⊥ 平面 $ABCD$.



（Ⅰ）求证：AB ⊥ 平面 PBC；

（Ⅱ）求平面 PAD 和平面 BCP 所成二面角（小于 90°）的大小；

（Ⅲ）在棱 PB 上是否存在点 M 使得 CM // 平面 PAD？若存在，求 $\frac{PM}{PB}$ 的值；若不存在，请说明理由.

(18)（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax-a)$，其中 a 是常数.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若存在实数 k，使得关于 x 的方程 $f(x)=k$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

(19)（本小题满分 14 分）

已知焦点在 x 轴上的椭圆 C 过点 $(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，Q 为椭圆 C 的左顶点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）已知过点 $(-\frac{6}{5},0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点.

（ⅰ）若直线 l 垂直于 x 轴，求 $\angle AQB$ 的大小；

（ⅱ）若直线 l 与 x 轴不垂直，是否存在直线 l 使得 ΔQAB 为等腰三角形？如果存在，求出直线 l 的方程；如果不存在，请说明理由.

(20)（本小题满分 14 分）

已知集合 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*)$，若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq M(m\in\mathbf{N}^*)$，且对任意的 $b\in M$，存在 $a_i,a_j\in A(1\le i\le j\le m)$，使得 $b=\lambda_1 a_i+\lambda_2 a_j$（其中 $\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\}$），则称集合 A 为集合 M 的一个 m 元基底.

（Ⅰ）分别判断下列集合 A 是否为集合 M 的一个二元基底，并说明理由；

① $A=\{1,5\}$，$M=\{1,2,3,4,5\}$；

② $A=\{2,3\}$，$M=\{1,2,3,4,5,6\}$.

（Ⅱ）若集合 A 是集合 M 的一个 m 元基底，证明：$m(m+1)\ge n$；

（Ⅲ）若集合 A 为集合 $M=\{1,2,3,\cdots,19\}$ 的一个 m 元基底，求出 m 的最小可能值，并写出当 m 取最小值时 M 的一个基底 A.

海淀区高三年级第一学期期末练习

数　　学（理科）

参考答案及评分标准　　2012．01

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	A	D	B	D	C	A	B	D

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

（9）5　　（10）7　　（11）$\frac{5}{4}$　　（12）乙，乙

（13）$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$　　（14）8；$\frac{\pi}{3}$

注：（13）题正确答出一种情况给3分，全对给5分；（12）、（14）题第一空3分；第二空2分.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A=2B$，

所以 $\cos A=\cos 2B=1-2\sin^2 B$. ……2 分

因为 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\cos A=1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. ……3 分

由题意可知，$B\in(0,\frac{\pi}{2})$.

所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……5 分

因为 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……6 分

所以 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. ……8 分

（Ⅱ）因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，$b=2$，……10 分

所以$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{a}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

所以$a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.……11 分

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{20\sqrt{2}}{9}$.……13 分

(16)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设“甲、乙两支队伍恰好排在前两位”为事件A，则

$P(A)=\frac{2\times 3!}{5!}=\frac{1}{10}$.……4 分

所以 甲、乙两支队伍恰好排在前两位的概率为$\frac{1}{10}$.

……5 分

（Ⅱ）随机变量X 的可能取值为$0,\ 1,\ 2,\ 3$.……6 分

$P(X=0)=\frac{2\times 4!}{5!}=\frac{2}{5}$，

$P(X=1)=\frac{3\times 2\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{2\times 2!\times 3\times 2!}{5!}=\frac{1}{5}$，

$P(X=3)=\frac{2\times 3!}{5!}=\frac{1}{10}$.……10 分

随机变量X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

因为 $EX=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$，

所以 随机变量X 的数学期望为1.……13 分

(17)（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：因为 $\angle ABC=90°$，

所以 $AB \perp BC$. ……1 分

因为 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$，

$AB \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB \perp$ 平面 PBC. ……3 分

（Ⅱ）解：取 BC 的中点 O，连接 PO.

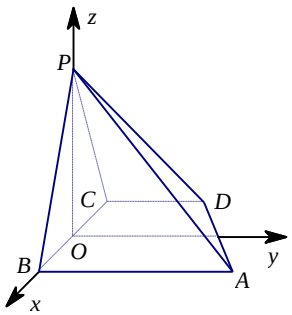
因为 $PB = PC$，

所以 $PO \perp BC$.

因为 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$， $PO \subset$ 平面 PBC，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$. ……4 分

如图，以 O 为原点， OB 所在的直线为 x 轴，在平面 $ABCD$ 内过 O 垂直于 BC 的直线为 y 轴， OP 所在的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 不妨设 $BC = 2$. 由直角梯形 $ABCD$ 中 $AB = PB = PC = BC = 2CD$ 可得 $P(0,0,\sqrt{3})$， $D(-1,1,0)$，$A(1,2,0)$.



所以 $\overrightarrow{DP} = (1,-1,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{DA} = (2,1,0)$.

设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$.

因为 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DA} = 0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} (x,y,z) \cdot (1,-1,\sqrt{3}) = 0, \\ (x,y,z) \cdot (2,1,0) = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x - y + \sqrt{3}z = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -2$， $z = -\sqrt{3}$.

所以 $\boldsymbol{m} = (1,-2,-\sqrt{3})$. ……7 分

取平面 BCP 的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$.

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

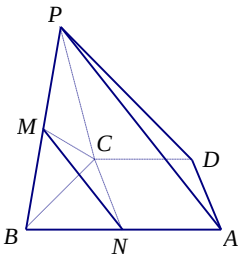
所以 平面 ADP 和平面 BCP 所成的二面角（小于 $90°$）的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.

……9 分

（Ⅲ）解：在棱 PB 上存在点 M 使得 CM ∥平面 PAD，此时 $\frac{PM}{PB}=\frac{1}{2}$．理由如下：　　……10 分

取 AB 的中点 N，连接 CM，CN，MN．

则 MN ∥ PA，$AN=\frac{1}{2}AB$．



因为 $AB=2CD$，

所以 $AN=CD$．

因为 AB ∥ CD，

所以 四边形 $ANCD$ 是平行四边形．

所以 CN ∥ AD．

因为 $MN\cap CN=N$，$PA\cap AD=A$，

所以 平面 MNC ∥平面 PAD．　　……13 分

因为 $CM\subset$平面 MNC，

所以 CM ∥平面 PAD．　　……14 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=e^x(x^2+ax-a)$ 可得

$$f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x].$$　　……2 分

当 $a=1$ 时，$f(1)=e$，$f'(1)=4e$．　　……4 分

所以 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=4e(x-1)$，

即 $y=4ex-3e$．　　……5 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=e^x(x^2+(a+2)x)=0$，

解得 $x=-(a+2)$ 或 $x=0$．　　……6 分

当 $-(a+2)\le 0$，即 $a\ge -2$ 时，在区间 $[0,+\infty)$ 上，$f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数．

所以 方程 $f(x)=k$ 在 $[0,+\infty)$ 上不可能有两个不相等的实数根．

　　……8 分

当 $-(a+2)>0$，即 $a<-2$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表

x	0	$(0,-(a+2))$	$-(a+2)$	$(-(a+2),+\infty)$

$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	$-a$	↘	$\frac{a+4}{e^{a+2}}$	↗

由上表可知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(-(a+2))=\frac{a+4}{e^{a+2}}$.

……10 分

因为 函数 $f(x)$ 是 $(0,-(a+2))$ 上的减函数，是 $(-(a+2),+\infty)$ 上的增函数，

且当 $x\geq -a$ 时，有 $f(x)\geq e^{-a}(-a)>-a$. ……11 分

所以 要使方程 $f(x)=k$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个不相等的实数根， k 的取值范围必须是

$(\frac{a+4}{e^{a+2}},-a]$. ……13 分

(19)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 $a^2=b^2+c^2$.

由题意可知：$b=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……2 分

所以 $a^2=4$.

所以，椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $Q(-2,0)$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

（ⅰ）当直线 l 垂直于 x 轴时，直线 l 的方程为 $x=-\frac{6}{5}$.

由 $\begin{cases}x=-\frac{6}{5},\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=-\frac{6}{5},\\ y=\frac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{6}{5},\\ y=-\frac{4}{5}.\end{cases}$

即 $A(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}),\ B(-\frac{6}{5},-\frac{4}{5})$（不妨设点 A 在 x 轴上方）.

……5 分

则直线 AQ 的斜率 $k_{AQ}=1$，直线 BQ 的斜率 $k_{BQ}=-1$.

因为 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}=-1$，

所以 $AQ \perp BQ$.

所以 $\angle AQB = \frac{\pi}{2}$. ……6 分

（ii）当直线 l 与 x 轴不垂直时，由题意可设直线 AB 的方程为 $y = k(x + \frac{6}{5})(k \neq 0)$.

由 $\begin{cases} y = k(x + \frac{6}{5}), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y 得：$(25 + 100k^2)x^2 + 240k^2x + 144k^2 - 100 = 0$.

因为 点 $(-\frac{6}{5}, 0)$ 在椭圆 C 的内部，显然 $\Delta > 0$.

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{240k^2}{25 + 100k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{144k^2 - 100}{25 + 100k^2}. \end{cases}$ ……8 分

因为 $\overrightarrow{QA} = (x_1 + 2, y_1)$, $\overrightarrow{QB} = (x_2 + 2, y_2)$, $y_1 = k(x_1 + \frac{6}{5})$, $y_2 = k(x_2 + \frac{6}{5})$,

所以 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1 y_2$

$= (x_1 + 2)(x_2 + 2) + k(x_1 + \frac{6}{5}) \cdot k(x_2 + \frac{6}{5})$

$= (1 + k^2)x_1 x_2 + (2 + \frac{6}{5}k^2)(x_1 + x_2) + 4 + \frac{36}{25}k^2$

$= (1 + k^2)\frac{144k^2 - 100}{25 + 100k^2} + (2 + \frac{6}{5}k^2)(-\frac{240k^2}{25 + 100k^2}) + 4 + \frac{36}{25}k^2 = 0$.

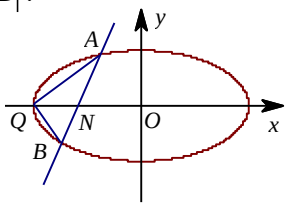
所以 $\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB}$.

所以 ΔQAB 为直角三角形. ……11 分

假设存在直线 l 使得 ΔQAB 为等腰三角形，则 $|QA| = |QB|$.

取 AB 的中点 M，连接 QM，则 $QM \perp AB$.

记点 $(-\frac{6}{5}, 0)$ 为 N.



另一方面，点 M 的横坐标 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{120k^2}{25 + 100k^2} = -\frac{24k^2}{5 + 20k^2}$,

所以 点 M 的纵坐标 $y_M=k(x_M+\frac{6}{5})=\frac{6k}{5+20k^2}$.

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{NM}=(\frac{10+16k^2}{5+20k^2},\frac{6k}{5+20k^2})\cdot(\frac{6}{5+20k^2},\frac{6k}{5+20k^2})$

$=\frac{60+132k^2}{(5+20k^2)^2}\neq 0$.

所以 $\overrightarrow{QM}$ 与 $\overrightarrow{NM}$ 不垂直，矛盾.

所以 当直线 l 与 x 轴不垂直时，不存在直线 l 使得 ΔQAB 为等腰三角形.

……13 分

(20)（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）① $A=\{1,5\}$ 不是 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的一个二元基底.

理由是 $3\neq\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 5(\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\})$；

② $A=\{2,3\}$ 是 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个二元基底.

理由是 $1=-1\times 2+1\times 3, 2=1\times 2+0\times 3, 3=0\times 2+1\times 3$，

$4=1\times 2+1\times 2, 5=1\times 2+1\times 3, 6=1\times 3+1\times 3$.

……3 分

（Ⅱ）不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，则

形如 $1\cdot a_i+0\cdot a_j\ (1\le i\le j\le m)$ 的正整数共有 m 个；

形如 $1\cdot a_i+1\cdot a_i\ (1\le i\le m)$ 的正整数共有 m 个；

形如 $1\cdot a_i+1\cdot a_j\ (1\le i<j\le m)$ 的正整数至多有 C_m^2 个；

形如 $(-1)\cdot a_i+1\cdot a_j\ (1\le i<j\le m)$ 的正整数至多有 C_m^2 个.

又集合 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 含 n 个不同的正整数， A 为集合 M 的一个 m 元基底.

故 $m+m+C_m^2+C_m^2\ge n$，即 $m(m+1)\ge n$. ……8 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $m(m+1)\ge 19$，所以 $m\ge 4$.

当$m=4$时，$m(m+1)-19=1$，即用基底中元素表示出的数最多重复一个.*

假设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$为$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的一个4元基底，

不妨设$a_1<a_2<a_3<a_4$，则$a_4\geq 10$.

当$a_4=10$时，有$a_3=9$，这时$a_2=8$或7.

如果$a_2=8$，则由$1=10-9,1=9-8,18=9+9,18=10+8$，与结论*矛盾.

如果$a_2=7$，则$a_1=6$或5.易知$A=\{6,7,9$和$A=\{5,7,9,10\}$都不是$M=\{1,2,3\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4=11$时，有$a_3=8$，这时$a_2=7$，$a_1=6$，易知$A=\{6,7,8,11\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4=12$时，有$a_3=7$，这时$a_2=6$，$a_1=5$，易知$A=\{5,6,7$不是$M=\{1,2,3\}$，的4元基底，矛盾.

当$a_4=13$时，有$a_3=6$，$a_2=5$，$a_1=4$，易知$A=\{4,5,6,13\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4=14$时，有$a_3=5$，$a_2=4$，$a_1=3$，易知$A=\{3,4,5,14\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4=15$时，有$a_3=4$，$a_2=3$，$a_1=2$，易知$A=\{2,3,4,15\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4=16$时，有$a_3=3$，$a_2=2$，$a_1=1$，易知$A=\{1,2,3,16\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的4元基底，矛盾.

当$a_4\geq 17$时，A均不可能是M的4元基底.

当$m=5$时，M的一个基底$A=\{1,3,5,9,16\}$；或{3,7,8,9,10}；或{4,7,8,9,10}等，只要写出一个即可.

综上，m的最小可能值为5. ……14分

丰台区2011—2012学年度第一学期期末练习　2012.1

高三数学（理科）

第一部分　（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设集合 A={x｜x<4}，B={x｜x2<4}，则

(A) A⊆B　　(B) B⊆A　　(C) A⊆$\complement_R B$　　(D) B⊆$\complement_R A$

2．在复平面内，复数$\frac{2i}{1+i}$对应的点位于

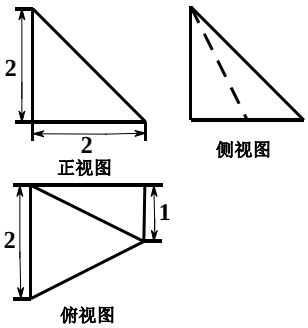
(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3．已知命题 p：$\exists x \in R$，$x-2>\lg x$，命题 q：$\forall x \in R$，$x^2>0$，则

(A) 命题$p \vee q$是假命题　　(B) 命题$p \wedge q$是真命题

(C) 命题$p \vee (\neg q)$是假命题　　(D) 命题$p \wedge (\neg q)$是真命题

4．若某空间几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积是



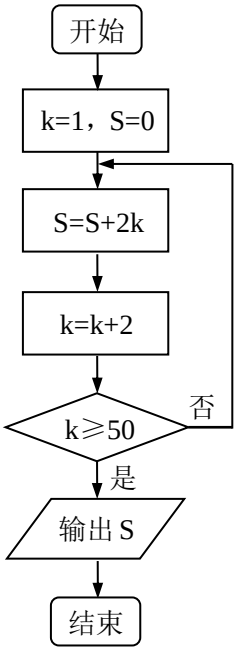
(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C) 2　　(D)6

5．预测人口的变化趋势有多种方法，“直接推算法”使用的公式是$P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$，其中 Pn 为预测人口数，P0 为初期人口数，k 为预测年内增长率，n 为预测期间隔年数．如果在某一时期有-1<k<0，那么这期间人口数

(A) 呈上升趋势　　(B) 呈下降趋势

(C) 摆动变化　　(D) 不变

6．执行如右图所示的程序框图，输出的 S 值为



(A) $\frac{2}{3}(4^{25}-1)$　　(B) $\frac{2}{3}(4^{26}-1)$

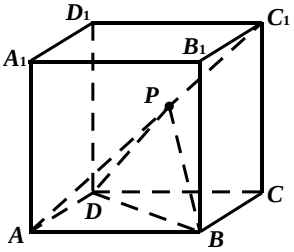
(C) $2^{50}-1$　　(D) $2^{51}-1$

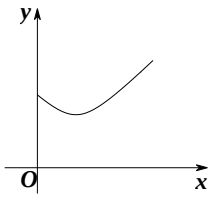
7．若函数$f(x)=\log_2(x+\frac{1}{x})-a$在区间$(\frac{1}{2},2)$内有零点，则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\log_2\frac{5}{2},-1]$　　(B) $(1,\log_2\frac{5}{2})$

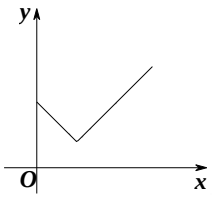
(C) $(0,\log_2\frac{5}{2})$　　(D) $[1,\log_2\frac{5}{2})$

8．如图，P 是正方体 ABCD—A1B1C1D1 对角线 AC1 上一动点，设 AP 的长度为 x，若△PBD 的面积为 f(x)，则 f(x)的图象大致是

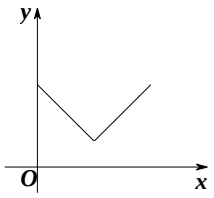




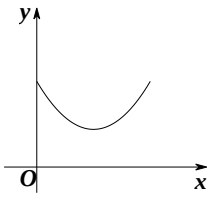
(A)



(B)



(C)



(D)

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．设 Sn 是等差数列{an}的前 n 项和，若 S5= a8+5，S6= a7+ a9-5，则公差 d 等于 .

10．若过点 A(-2,m)，B(m,4)的直线与直线 2x+y+2=0 平行，则 m 的值为 .

11．曲线 y=3-3x2 与 x 轴所围成的封闭图形的面积为 .

12．已知平面向量 $\vec{a}=(4,3)$，$2\vec{a}-\vec{b}=(2,-2)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦值等于 .

13．在面积为 S 的矩形 ABCD 内随机取一点 P，则△PBC 的面积小于 $\frac{S}{4}$ 的概率是 .

14．函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对于定义域内任意 x_1，x_2 $(x_1 \neq x_2)$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为恒均变函数．给出下列函数：① $f(x)=2x+3$；② $f(x)=x^2-2x+3$；③ $f(x)=\frac{1}{x}$；④ $f(x)=e^x$；⑤ $f(x)=\ln x$．其中为恒均变函数的序号是 .（写出所有满足条件的函数的序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（Ⅱ）若 α 为第二象限角，且 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$ 的值.

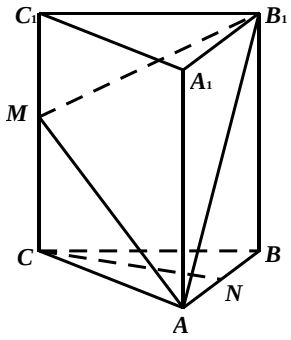
16.（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱 ABC-A1B1C1 中，CC1⊥底面 ABC，AC=BC=2，$AB=2\sqrt{2}$，CC1=4，M 是棱 CC1 上一点.

（Ⅰ）求证：BC⊥AM；

（Ⅱ）若 M，N 分别是 CC1，AB 的中点，求证：CN //平面 AB1M；

（Ⅲ）若 $C_1M=\frac{3}{2}$，求二面角 A-MB1-C 的大小.



17.（本小题共 13 分）

某市医疗保险实行定点医疗制度，按照“就近就医、方便管理”的原则，参加保险人员可自主选择四家医疗保险定点医院和一家社区医院作为本人就诊的医疗机构．若甲、乙、丙、丁 4 名参加保险人员所在地区附近有 A，B，C 三家社区医院，并且他们的选择是相互独立的.

（Ⅰ）求甲、乙两人都选择 A 社区医院的概率；

（Ⅱ）求甲、乙两人不选择同一家社区医院的概率；

（Ⅲ）设 4 名参加保险人员中选择 A 社区医院的人数为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望.

18.（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，动点 P 与两个定点 $M(1,0)$，$N(4,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求动点P的轨迹W的方程；

（Ⅱ）若直线l：$y=kx+3$与曲线W交于A，B两点，在曲线W上是否存在一点Q，使得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，若存在，求出此时直线$l$的斜率；若不存在，说明理由.

19.（本小题共 14 分）

设函数$f(x)=x-a\ln x+\frac{b}{x}$在$x=1$处取得极值.

（Ⅰ）求a与b满足的关系式；

（Ⅱ）若$a>1$，求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅲ）若$a>3$，函数$g(x)=a^2x^2+3$，若存在m_1，$m_2\in[\frac{1}{2},2]$，使得$|f(m_1)-g(m_2)|<9$成立，求a的取值范围.

20.（本小题共 13 分）

若有穷数列{an}满足：（1）首项 a1=1，末项 am=k，（2）an+1= an+1 或 an+1=2an ，(n=1，2，…，m-1)，则称数列{an}为 k 的 m 阶数列.

（Ⅰ）请写出一个 10 的 6 阶数列；

（Ⅱ）设数列{bn}是各项为自然数的递增数列，若$k=2^{b_1}+2^{b_2}+2^{b_3}+\cdots+2^{b_l}(l\in N$，且$l\geqslant 2)$，求
m 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2011—2012 学年度第一学期期末练习 2012.01

高三数学（理科）答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	B	A	D	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．5　　10．-8　　11．4

12．$\frac{24}{25}$　　13．$\frac{1}{2}$　　14．①②（只写出一个给 2 分）

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（Ⅱ）若 α 为第二象限角，且 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$ 的值.

解：（Ⅰ）因为

$f(x)=1+\cos x-\sqrt{3}\sin x$ ……1 分

$=1+2\cos(x+\frac{\pi}{3})$， ……2 分

所以函数 $f(x)$ 的周期为 2π，值域为 $[-1,3]$. ……4 分

（Ⅱ）因为 $f(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，

所以 $1+2\cos\alpha=\frac{1}{3}$，即 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. ……5 分

因为 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$ ……8 分

$=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2\cos\alpha}$，　……10 分

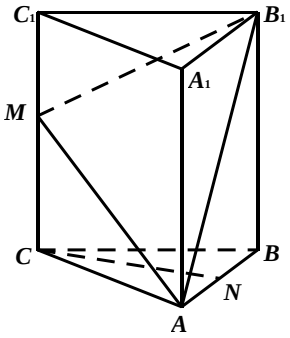
又因为α为第二象限角，　所以 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.　……11 分

$=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}$

所以原式　.　……13 分

16.（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱 ABC-A1B1C1 中，CC1⊥底面 ABC，AC=BC=2，$AB=2\sqrt{2}$，CC1=4，M 是棱 CC1 上一点.



（Ⅰ）求证：BC⊥AM；

（Ⅱ）若 M，N 分别是 CC1，AB 的中点，求证：CN //平面 AB1M；

（Ⅲ）若 $C_1M=\dfrac{3}{2}$，求二面角 A-MB1-C 的大小.

证明：（Ⅰ）因为三棱柱 ABC-A1B1C1 中 CC1⊥平面 ABC，

所以 CC1⊥BC.　……1 分

因为 AC=BC=2，$AB=2\sqrt{2}$，

所以由勾股定理的逆定理知 BC⊥AC.　……2 分

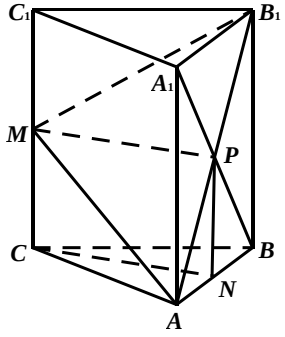
因为 AC∩CC1=C，

所以 BC⊥平面 ACC1A1.　……3 分

因为 AM⊂平面 ACC1A1，

所以 BC⊥AM.　……4 分

（Ⅱ）连结 A1B 交 AB1 于 P.　……5 分



因为三棱柱 ABC-A1B1C1，

所以 P 是 A1B 的中点.

因为 M，N 分别是 CC1，AB 的中点，

所以 NP // CM，且 NP = CM，

所以四边形 MCNP 是平行四边形，　……6 分

所以 CN//MP.　……7 分

因为 CN⊄平面 AB1M，MP⊂平面 AB1M，　……8 分

所以 CN //平面 AB1M.　……9 分

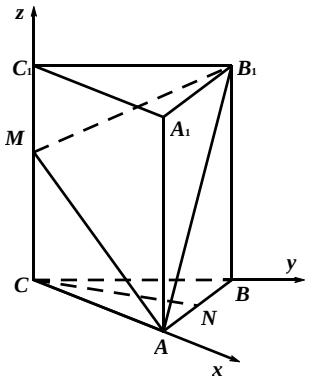
（Ⅲ）因为 BC⊥AC，且 CC1⊥平面 ABC，

以 C 为原点，CA，CB，CC1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 C-xyz.

因为 $C_1M=\dfrac{3}{2}$，所以 C(0,0,0)，A(2,0,0)，B1(0,2,4)，$M(0,0,\dfrac{5}{2})$，$\overrightarrow{AM}=(-2,0,\dfrac{5}{2})$，

$\overrightarrow{B_1M}=(0,-2,-\frac{3}{2})$. ……10 分

设平面 AMB_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1M}=0$.



即 $\begin{cases}(-2,0,\frac{5}{2})\cdot(x,y,z)=0,\\(0,-2,-\frac{3}{2})\cdot(x,y,z)=0.\end{cases}$ ……11 分

令 $x=5$，则 $y=-3,z=4$，即 $\vec{n}=(5,-3,4)$.

又平面 MB1C 的一个法向量是 $\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{CA}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……12 分

由图可知二面角 A-MB1-C 为锐角，

所以二面角 A-MB1-C 的大小为 $\frac{\pi}{4}$. ……14 分

17.（本小题共 13 分）

某市医疗保险实行定点医疗制度，按照“就近就医、方便管理”的原则，参加保险人员可自主选择四家医疗保险定点医院和一家社区医院作为本人就诊的医疗机构．若甲、乙、丙、丁 4 名参加保险人员所在的地区附近有 A，B，C 三家社区医院，并且他们对社区医院的选择是相互独立的．

（Ⅰ）求甲、乙两人都选择 A 社区医院的概率；

（Ⅱ）求甲、乙两人不选择同一家社区医院的概率；

（Ⅲ）设 4 名参加保险人员中选择 A 社区医院的人数为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望．

解：（Ⅰ）设“甲、乙两人都选择 A 社区医院”为事件 A，那么 ……1 分

$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. ……3 分

所以甲、乙两人都选择 A 社区医院的概率为 $\frac{1}{9}$. ……4 分

（Ⅱ）设“甲、乙两人选择同一个社区医院”为事件 B，那么 ……5 分

$P(B)=3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$， ……7 分

所以甲、乙两人不选择同一个社区医院的概率是 $P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$. ……8 分

（III）（方法一）随机变量ξ可能取的值为 0，1，2，3，4．那么 ……9 分

$P(\xi=0)=C_4^0\times(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$；$P(\xi=1)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$；

$P(\xi=2)=C_4^2\times(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}$；$P(\xi=3)=C_4^3\times(\frac{1}{3})^3\times(\frac{2}{3})=\frac{8}{81}$；

$P(\xi=4)=C_4^4\times(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$. （错三个没分）

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

……12 分

$E\xi=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3}$. ……13 分

（方法二）依题意 $\xi\sim B(4,\frac{1}{3})$， ……10 分

所以ξ的分布列为 $P(\xi=k)=C_4^k\times(\frac{1}{3})^k\times(\frac{2}{3})^{4-k}=C_4^k\times\frac{2^{4-k}}{81}$，$k=0,1,2,3,4$．即

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

……12 分

所以 $E\xi=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. ……13 分

18.（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，动点 P 与两个定点 $M(1,0)$，$N(4,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 W 的方程；

（Ⅱ）若直线l：$y=kx+3$与曲线W交于A，B两点，在曲线W上是否存在一点Q，使得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，若存在，求出此时直线$l$的斜率；若不存在，说明理由.

解：（Ⅰ）设点P的坐标为$P(x,y)$，依题意，$\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{1}{2}$，……1分

即$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，……3分

化简得$x^2+y^2=4$.

所以动点P的轨迹W的方程为$x^2+y^2=4$.……5分

（Ⅱ）因为直线l：$y=kx+3$与曲线W相交于A，B两点，

所以$d_{O-l}=\frac{|3|}{\sqrt{1+k^2}}<2$，所以$k>\frac{\sqrt{5}}{2}$或$k<-\frac{\sqrt{5}}{2}$.……7分

假设存在点Q，使得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.……8分

因为A，B在圆上，且$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，

由向量加法的平行四边形法则可知四边形$OAQB$为菱形，

所以OQ与AB互相垂直且平分，……9分

所以原点O到直线l：$y=kx+3$的距离为$d=\frac{1}{2}|OQ|=1$.……10分

即$d_{O-l}=\frac{|3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k^2=8$，$k=\pm2\sqrt{2}$，经验证满足条件.……12分

所以存在点Q，使得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.……13分

19.（本小题共14分）

已知函数$f(x)=x-a\ln x+\frac{b}{x}$在$x=1$处取得极值.

（Ⅰ）求a与b满足的关系式；

（Ⅱ）若$a>1$，求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅲ）若$a>3$，函数$g(x)=a^2x^2+3$，若存在m_1，$m_2\in[\frac{1}{2},2]$，使得$|f(m_1)-g(m_2)|<9$成立，求a的取值范围.

解：（Ⅰ）$f'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$，……2分

由$f'(1)=0$得$b=1-a$.……3分

（Ⅱ）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，……4分

由（Ⅰ）可得$f'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{1-a}{x^2}=\frac{x^2-ax-(1-a)}{x^2}=\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，则$x_1=1$，$x_2=a-1$.……6分

因为$x=1$是$f(x)$的极值点，所以$x_1\neq x_2$，即$a\neq 2$.……7分

所以当$a>2$时，$a-1>1$，

x	$(0,1)$	1	$(1,a-1)$	$a-1$	$(a-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

所以单调递增区间为$(0,1)$，$(a-1,+\infty)$，单调递减区间为$(1,a-1)$.……8分

当$1<a<2$时，$0<a-1<1$，

所以单调递增区间为$(0,a-1)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(a-1,1)$.……9分

（Ⅲ）当$a>3$时，$f(x)$在$[\frac{1}{2},1)$上为增函数，在$(1,2]$为减函数，

所以$f(x)$的最大值为$f(1)=2-a<0$.……10分

因为函数$g(x)$在$[\frac{1}{2},2]$上是单调递增函数，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a^2+3>0$. ……11 分

所以 $g(x)>f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上恒成立. ……12 分

要使存在 m_1 ， $m_2\in[\frac{1}{2},2]$ ，使得 $|f(m_1)-g(m_2)|<9$ 成立，

只需要 $g(\frac{1}{2})-f(1)<9$ ，即 $\frac{1}{4}a^2+3-(2-a)<9$ ，所以 $-8<a<4$. ……13 分

又因为 $a>3$ ， 所以 a 的取值范围是 $a\in(3,4)$. ……14 分

20.（本小题共 13 分）

若有穷数列{an}满足：（1）首项 a1=1，末项 am=k，（2）an+1= an+1 或 an+1=2an，(n=1，2，…，m-1)，则称数列{an}为 k 的 m 阶数列.

（Ⅰ）请写出一个 10 的 6 阶数列；

（Ⅱ）设数列{bn}是各项为自然数的递增数列，若 $k=2^{b_1}+2^{b_2}+2^{b_3}+\cdots+2^{b_l}(l\in N$ ，且 $l\geqslant 2)$ ，求 m 的最小值.

解：（Ⅰ）1，2，3，4，5，10 或 1，2，4，8，9，10. ……2 分

（Ⅱ）由已知在数列{an}中 an+1= an+1 或 an+1=2an，

当 a_m 为偶数时， $a_{m-1}=\frac{a_m}{2}(a_m\geqslant 2)$ ，或 $a_{m-1}=a_m-1$.

因为 $\frac{a_m}{2}\leqslant a_m-1\ \ (a_m\geqslant 2)$ ，

所以在数列{an}中 $1\leqslant a_i\leqslant\frac{a_m}{2}$ 中 i 的个数不多于 $1\leqslant a_j\leqslant a_m-1$ 中 j 的个数，

要使项数 m 最小，只需 $a_{m-1}=\frac{a_m}{2}(a_m\geqslant 2)$. ……5 分

当 am 为奇数时，必然有 $a_{m-1}=a_m-1(a_m\geqslant 2)$ ， a_{m-1} 是偶数，可继续重复上面的操作.

所以要使项数 m 最小，只需遇到偶数除以 2，遇到奇数则减 1.

因为 $a_m=k=2^{b_1}+2^{b_2}+2^{b_3}+\cdots+2^{b_l}$ ，且 $0\leqslant b_1<b_2<b_3<\cdots<b_l$ ，

只需除以 b_1 次 2，得到 $1+2^{b_2-b_1}+2^{b_3-b_1}+\cdots+2^{b_l-b_1}$ 为奇数；

减 1，得到 $2^{b_2-b_1}+2^{b_3-b_1}+\cdots+2^{b_l-b_1}$ 为偶数，

再除以 b_2-b_1 次 2，得到 $1+2^{b_3-b_2}+\cdots+2^{b_l-b_2}$；

再减 1，得到 $2^{b_3-b_2}+\cdots+2^{b_l-b_2}$ 为偶数，

……，

最后得到 $2^{b_l-b_{l-1}}$ 为偶数，

除以 b_l-b_{l-1} 次 2，得到 1，即为 a_1.

所以 $m=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_l-b_{l-1})+(l-1)+1=b_l+l$. ……13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）

北京市东城区 2011-2012 学年度高三数第一学期期末教学统一检测

数学（理科）

学校_____**班级**_____**姓名**_____**考号**_____

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 5 页，共 150 分。考试时长 120

分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|x\geq 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则

（A）$A\subseteq B$　（B）$B\subseteq A$　（C）$A\cup B=B$　（D）$A\cap B=\varnothing$

（2）在复平面内，复数 $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$ 对应的点位于

(A)第一象限　（B） 第二象限　（C） 第三象限　（D） 第四象限

（3）下列命题中正确的是

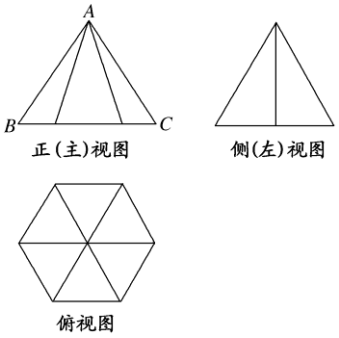
（A）如果两条直线都平行于同一个平面，那么这两条直线互相平行

（B）过一条直线有且只有一个平面与已知平面垂直

（C）如果一条直线平行于一个平面内的一条直线，那么这条直线平行于这个平面

（D）如果两条直线都垂直于同一平面，那么这两条直线共面

（4）一个几何体的三视图如图所示，其中正(主)视图中△ABC 是边长为 2 的正三角形，俯视图的边界为正六边形，那么该几何体的侧(左)视图的面积为

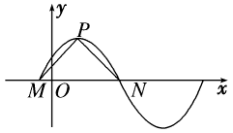


（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）1　（C）$\dfrac{3}{2}$　（D） 2

（5）在平面直角坐标系内，若曲线 C：$x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$ 上所有的点均在第二象限内，则实数 a 的取值范围为

（A）$(-\infty,-2)$　（B） $(-\infty,-1)$　（C）$(1,+\infty)$　（D）$(2,+\infty)$

（6）如图所示，点 P 是函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R},\omega>0)$ 的图象的最高点，M，N 是该图象与 x 轴的交点，若 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，则 ω 的值为



（A）$\dfrac{\pi}{8}$　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　（C）4　（D）8

（7）对于函数 $f(x)=\lg|x-2|+1$，有如下三个命题：

① $f(x+2)$ 是偶函数；

② $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上是减函数，在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数；

③ $f(x+2)-f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数.

其中正确命题的序号是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

（8）已知函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $[a,b]\,(a<b)$，值域为 $[1,5]$，则在平面直角坐标系内，点 (a,b) 的运动轨迹与两坐标轴围成的图形的面积为

（A）8　　（B）6　　（C）4　　（D）2

第Ⅱ卷（共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，那么 $\tan 2\alpha$ 的值为___.

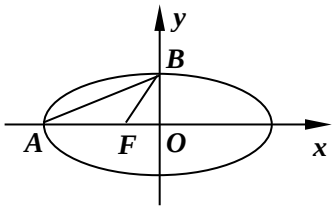
（10）若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为___.

（11）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, & x\le 0,\\ f(x-1), & x>0,\end{cases}$ 那么 $f(\frac{5}{6})$ 的值为___.

（12）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5+a_7=4$，$a_6+a_8=-2$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差等于___；

其前 n 项和 S_n 的最大值为___.

（13）如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，左焦点为 F，



上顶点为 B，若 $\angle BAO+\angle BFO=90^\circ$，则该椭圆的离心率是___.

(14)已知不等式 $xy\le ax^2+2y^2$，若对任意 $x\in[1,2]$ 且 $y\in[2,3]$，该不等式恒成立，则实数 a 的取值范围是___.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

已知△ ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，$b=1$.

（Ⅰ）若 $A=\frac{5\pi}{12}$，求 c；

（Ⅱ）若 $a=2c$，求△ ABC 的面积.

（16）（本小题共 13 分）

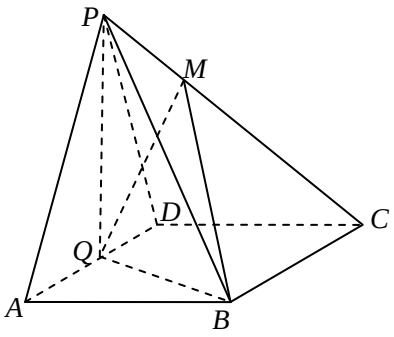
在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，其前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数，$b_1=1$，公比为 q，且 $b_2+S_2=12$，$q=\frac{S_2}{b_2}$.

（Ⅰ）求 a_n 与 b_n；

（Ⅱ）证明：$\frac{1}{3}\le\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{2}{3}$.

（17）（本小题共 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^{\circ}$，Q 为 AD 的中点，$PA=PD=AD=2$.



（Ⅰ）求证：$AD\perp$ 平面 PQB；

（Ⅱ）点 M 在线段 PC 上，$PM=tPC$，试确定 t 的值，使 $PA//$ 平面 MQB；

（Ⅲ）若 $PA//$ 平面 MQB，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，求二面角 $M-BQ-C$ 的大小.

（18）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2ax^3-3x^2$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）求证：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数；

（Ⅱ）若函数 $g(x)=f(x)+f'(x)(x\in[0,1])$ 在 $x=0$ 处取得最大值，求 a 的取值范围.

（19）（本小题共 13 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，M 为椭圆的上顶点，O 为坐标原点，且 $\triangle OMF$ 是等腰直角三角形.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）是否存在直线 l 交椭圆于 P，Q 两点，且使点 F 为 $\triangle PQM$ 的垂心（垂心：三角形三边高线的交点）？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

（20）（本小题共 14 分）

已知 M 是由满足下述条件的函数构成的集合：对任意 $f(x)\in M$，①方程 $f(x)-x=0$ 有实数根；②函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 满足 $0<f'(x)<1$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{4}$ 是否是集合 M 中的元素，并说明理由；

（Ⅱ）集合 M 中的元素 $f(x)$ 具有下面的性质：若 $f(x)$ 的定义域为 D，则对于任意 $[m,n]\subseteq D$，都存在 $x_0\in(m,n)$，使得等式 $f(n)-f(m)=(n-m)f'(x_0)$ 成立．试用这一性质证明：方程 $f(x)-x=0$ 有且只有一个实数根；

（Ⅲ）对任意 $f(x)\in M$，且 $x\in(a,b)$，求证：对于 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1，x_2，x_3，当 $|x_2-x_1|<1$，且 $|x_3-x_1|<1$ 时，$|f(x_3)-f(x_2)|<2$.

东城区 2011-2012 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学参考答案及评分标准 （理科）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）B　　（2）A　　（3）D　　（4）C

（5）D　　（6）B　　（7）A　　（8）C

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$-\frac{4}{3}$　　（10）30°　　（11）$-\frac{1}{2}$

（12）-3　57　　（13）$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　（14）$a \geqslant -1$

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，

整理得 $\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.　　……2 分

因为 $0<B<\pi$，

所以 $-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$.

故 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得 $B=\frac{\pi}{3}$.　　……4 分

由 $A=\frac{5\pi}{12}$，且 $A+B+C=\pi$，得 $C=\frac{\pi}{4}$.

由 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

解得 $c=\frac{\sqrt{6}}{3}$.　　……7 分

（Ⅱ）因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，又 $a=2c$，$B=\frac{\pi}{3}$，

所以$b^2=4c^2+c^2-4c^2\times\frac{1}{2}$，解得$b=\sqrt{3}c$. ……10 分

由此得$a^2=b^2+c^2$，故△ABC为直角三角形，$A=\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

其面积$S=\frac{1}{2}bc=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ……13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为d，

因为$\begin{cases}b_2+S_2=12,\\ q=\frac{S_2}{b_2},\end{cases}$所以$\begin{cases}q+6+d=12,\\ q=\frac{6+d}{q}.\end{cases}$

解得 $q=3$或$q=-4$（舍），$d=3$.

故$a_n=3+3(n-1)=3n$ ，$b_n=3^{n-1}$. ……6 分

（Ⅱ）因为$S_n=\frac{n(3+3n)}{2}$，

所以$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(3+3n)}=\frac{2}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$. ……9 分

故$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{3}\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]$

$=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n+1})$. ……11 分

因为$n\geqslant 1$，所以$0<\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$，于是$\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{n+1}<1$，

所以$\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n+1})<\frac{2}{3}$.

即$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{2}{3}$. ……13 分

（17）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）连接BD .

因为四边形$ABCD$为菱形，$\angle BAD=60^\circ$，

所以△ ABD 为正三角形．又 Q 为 AD 中点，

所以 $AD \perp BQ$.

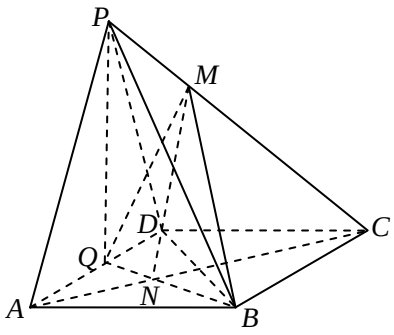
因为 $PA = PD$, Q 为 AD 的中点，

所以 $AD \perp PQ$.

又 $BQ \cap PQ = Q$ ，

所以 $AD \perp$ 平面 PQB . ……4 分

（Ⅱ）当 $t = \frac{1}{3}$ 时， PA // 平面 MQB .



下面证明：

连接 AC 交 BQ 于 N ，连接 MN .

因为 AQ // BC ，

所以 $\frac{AN}{NC} = \frac{AQ}{BC} = \frac{1}{2}$.

因为 PA // 平面 MQB ， $PA \subset$ 平面 PAC ，平面 $MQB \cap$ 平面 $PAC = MN$ ，

所以 MN // PA .

所以 $\frac{PM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$.

所以 $PM = \frac{1}{3}PC$ ，即 $t = \frac{1}{3}$.

因为 $PM = \frac{1}{3}PC$ ，

所以 $\frac{PM}{MC} = \frac{1}{2}$.

所以 $\frac{PM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ ，

所以 MN // PA .

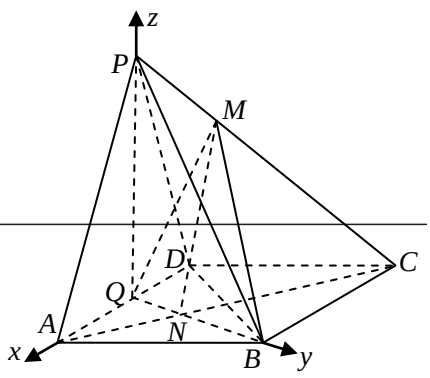
又 $MN \subset$ 平面 MQB ， $PA \not\subset$ 平面 MQB ，

所以 PA // 平面 MQB . ……9 分

（Ⅲ）因为 $PQ \perp AD$ ，

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，交线为 AD ，

所以 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$.



以 Q 为坐标原点，分别以 QA，QB，QP 所在的直线为 x, y, z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系 $Q-xyz$.

由 $PA=PD=AD=2$，

则有 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.

设平面 MQB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{QB}=(0,\sqrt{3},0)$

且 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PA}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{QB}$，

可得 $\begin{cases} x-\sqrt{3}z=0, \\ \sqrt{3}y=0. \end{cases}$

令 $z=1$, 得 $x=\sqrt{3}$，$y=0$.

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$ 为平面 MQB 的一个法向量.

取平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$，

故二面角 $M-BQ-C$ 的大小为 60° .　　……14 分

（18）（共 13 分）

证明：（Ⅰ）$f'(x)=6ax^2-6x=6x(ax-1)$.

因为 $a>0$ 且 $x<0$，所以 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数.　　……6 分

（Ⅱ）由题意 $g(x)=2ax^3+(6a-3)x^2-6x, x\in[0,1]$.

则 $g'(x)=6ax^2+2(6a-3)x-6=6\left[ax^2+(2a-1)x-1\right]$.　　……8 分

令 $g'(x)=0$，即 $ax^2+(2a-1)x-1=0$. ①

由于$\Delta=4a^2+1>0$，可设方程①的两个根为x_1，x_2，

由①得$x_1x_2=-\frac{1}{a}$，

由于$a>0$,所以$x_1x_2<0$，不妨设$x_1<0<x_2$，

$g'(x)=6a(x-x_1)(x-x_2)$.

当$0<x_2<1$时，$g(x_2)$为极小值，

所以在区间$[0,1]$上，$g(x)$在$x=0$或$x=1$处取得最大值；

当$x_2\geqslant 1$时，由于$g(x)$在区间$[0,1]$上是单调递减函数，所以最大值为$g(0)$，

综上，函数$g(x)$只能在$x=0$或$x=1$处取得最大值.　　……10 分

又已知$g(x)$在$x=0$处取得最大值，所以$g(0)\geqslant g(1)$，

即$0\geqslant 8a-9$，解得$a\leqslant\frac{9}{8}$，又因为$a>0$，

所以$a\in(0,\frac{9}{8}]$.　　……13 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由$\triangle OMF$是等腰直角三角形，得$b=1$，$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}$，

故椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.　　……5 分

（Ⅱ）假设存在直线l交椭圆于P，Q两点，且F为$\triangle PQM$的垂心，

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$,

因为$M(0,1)$，$F(1,0)$，故$k_{PQ}=1$.　　……7 分

于是设直线l的方程为$y=x+m$，

由$\begin{cases}y=x+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$3x^2+4mx+2m^2-2=0$.

由$\Delta>0$，得$m^2<3$，　且$x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$, $x_1x_2=\frac{2m^2-2}{3}$.　　……9 分

由题意应有 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，又 $\overrightarrow{MP}=(x_1,y_1-1)$，$\overrightarrow{FQ}=(x_2-1,y_2)$，

故 $x_1(x_2-1)+y_2(y_1-1)=0$，

得 $x_1(x_2-1)+(x_2+m)(x_1+m-1)=0$.

即 $2x_1x_2+(x_1+x_2)(m-1)+m^2-m=0$.

整理得 $2\times\frac{2m^2-2}{3}-\frac{4}{3}m(m-1)+m^2-m=0$.

解得 $m=-\frac{4}{3}$ 或 $m=1$. ……12 分

经检验，当 $m=1$ 时，$\triangle PQM$ 不存在，故舍去 $m=1$.

当 $m=-\frac{4}{3}$ 时，所求直线 l 存在，且直线 l 的方程为 $y=x-\frac{4}{3}$.

……13 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为①当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，

所以方程 $f(x)-x=0$ 有实数根 0；

② $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x$，

所以 $f'(x)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$，满足条件 $0<f'(x)<1$；

由①②，函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{4}$ 是集合 M 中的元素. ……5 分

（Ⅱ）假设方程 $f(x)-x=0$ 存在两个实数根 α，β $(\alpha\neq\beta)$，

则 $f(\alpha)-\alpha=0$，$f(\beta)-\beta=0$.

不妨设 $\alpha<\beta$，根据题意存在 $c\in(\alpha,\beta)$，

满足 $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(c)$.

因为 $f(\alpha)=\alpha$，$f(\beta)=\beta$，且 $\alpha\neq\beta$，所以 $f'(c)=1$.

与已知 $0<f'(x)<1$ 矛盾. 又 $f(x)-x=0$ 有实数根，

所以方程 $f(x)-x=0$ 有且只有一个实数根. ……10 分

（Ⅲ）当 $x_2 = x_3$ 时，结论显然成立；

当 $x_2 \neq x_3$，不妨设 $a < x_2 < x_3 < b$.

因为 $x \in (a,b)$, 且 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 为增函数，那么 $f(x_2) < f(x_3)$.

又因为 $f'(x) - 1 < 0$，所以函数 $f(x) - x$ 为减函数，

所以 $f(x_2) - x_2 > f(x_3) - x_3$.

所以 $0 < f(x_3) - f(x_2) < x_3 - x_2$，即 $|f(x_3) - f(x_2)| < |x_3 - x_2|$.

因为 $|x_2 - x_1| < 1$，所以 $-1 < x_1 - x_2 < 1$，　（1）

又因为 $|x_3 - x_1| < 1$，所以 $-1 < x_3 - x_1 < 1$，　（2）

（1）+（2）得 $-2 < x_2 - x_3 < 2$ 即 $|x_3 - x_2| < 2$.

所以 $|f(x_3) - f(x_2)| < |x_3 - x_2| < 2$.

综上，对于任意符合条件的 x_1，x_2, x_3 总有 $|f(x_3) - f(x_2)| < 2$ 成立. ……14 分

北京市朝阳区 2011-2012 学年度高三年级第一学期期末统一考试

数学试卷（理工类）

2012.1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

注意事项：考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上答无效。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值为　（　）

A．9　　B．1　　C．-1　　D．-9

2.设集合 $\mathrm{U}=\{1,2,3,4\}$，$M=\{x\in U\,|\,x^2-5x+p=0\}$，若 $C_U M=\{2,3\}$，则实数 p 的值为　（　）

A．-4　　B．4　　C．-6　　D．6

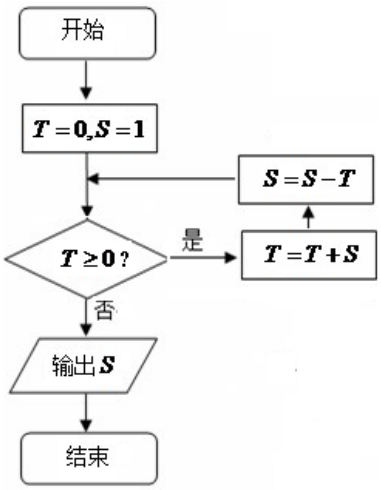
3. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$ 且 a_1,a_3,a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 等于　（　）

A．$\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$　　B．$\frac{n^2}{4}+\frac{7n}{4}$　　C．$\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}$　　D．n^2+n

4.执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　）

A．1　　B．-1

C．-2　　D．0



5.已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，设 $a=f(\frac{\pi}{7})$，$b=f(\frac{\pi}{6})$，$c=f(\frac{\pi}{3})$，则 a,b,c 的大小关系

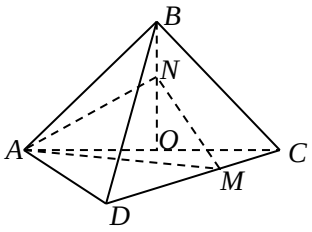
是 （ ）

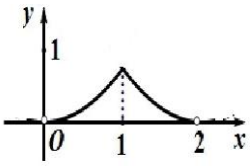
A. $a<b<c$ B. $c<a<b$ C. $b<a<c$ D. $b<c<a$

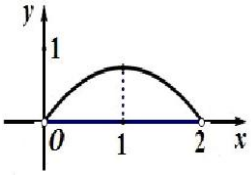
6.函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，则实数 a 的取值范围是（ ）

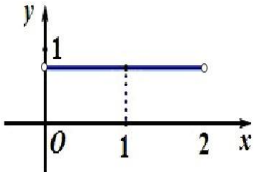
A. $(1,3)$ B. $(1,2)$ C. $(0,3)$ D. $(0,2)$

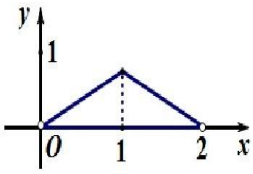
7. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，将 ΔABC 沿对角线 AC 折起，使平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，得到如图所示的三棱锥 $B-ACD$. 若 O 为 AC 边的中点，M，N 分别为线段 DC，BO 上的动点（不包括端点），且 $BN=CM$. 设 $BN=x$，则三棱锥 $N-AMC$ 的体积 $y=f(x)$ 的函数图象大致是（ ）



A. 

B. 

C. 

D. 

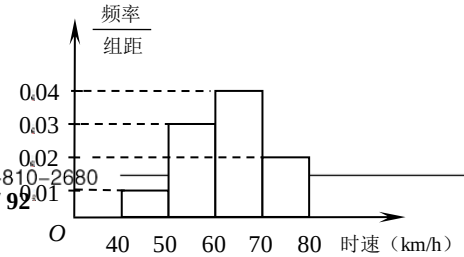
8.已知集合 $A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,\ y=3m^2+12,\ m\in\mathbf{Z}\}$. 若存在实数 a,b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，称点 (a,b) 为“£”点，则“£”点在平面区域 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 108\}$ 内的个数是 （ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 无数个

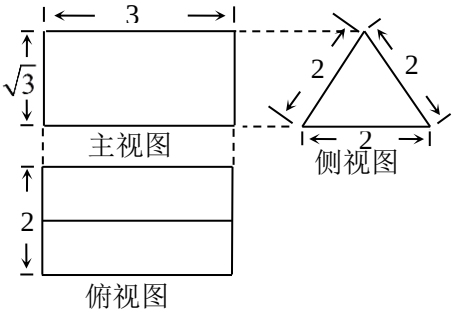
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9.已知有若干辆汽车通过某一段公路，从中抽取 200 辆汽车进行测速分析，其时速的频率分布直方图如图所示，则时速在区间 $[60,70)$ 上的汽车大约有_____辆.



10．某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积是_____.



11．在平面直角坐标系中,不等式组 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ x-y+4\geq 0, \\ x\leq a \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积是 9,则实数 a 的值为_____.

12．设直线 $x-my-1=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A，B 两点，且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$，则实数 m 的值是_____.

13．某公司购买一批机器投入生产，据市场分析每台机器生产的产品可获得的总利润 y（万元）与机器运转时间 x（年数，$x\in\mathbf{N}^*$）的关系为 $y=-x^2+18x-25$.则当每台机器运转_____年时，年平均利润最大，最大值是_____万元.

14．已知两个正数 a,b,可按规则 $c=ab+a+b$ 扩充为一个新数 c,在 a,b,c 三个数中取两个较大的数,按上述规则扩充得到一个新数，依次下去，将每扩充一次得到一个新数称为一次操作.

（1）若 $a=1,b=3$,按上述规则操作三次,扩充所得的数是_____；

（2）若 $p>q>0$，经过 6 次操作后扩充所得的数为 $(q+1)^m(p+1)^n-1$（m,n 为正整数），则 m,n 的值分别为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（本题满分 13 分）

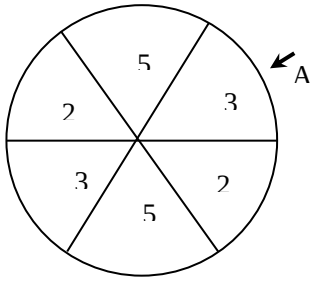
在锐角 ΔABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 所对的边，且满足 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）若 $a+c=5$，且 $a>c$，$b=\sqrt{7}$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

16. （本题满分 13 分）

如图，一个圆形游戏转盘被分成 6 个均匀的扇形区域．用力旋转转盘，转盘停止转动时，箭头 A 所指区域的数字就是每次游戏所得的分数（箭头指向两个区域的边界时重新转动），且箭头 A 指向每个区域的可能性都是相等的．在一次家庭抽奖的活动中，要求每个家庭派一位儿童和一位成人先后分别转动一次游戏转盘，得分情况记为 (a,b)（假设儿童和成人的得分互不影响，且每个家庭只能参加一次活动）．



（Ⅰ）求某个家庭得分为 $(5,3)$ 的概率？

（Ⅱ）若游戏规定：一个家庭的得分为参与游戏的两人得分之和，且得分大于等于 8 的家庭可以获得一份奖品．请问某个家庭获奖的概率为多少？

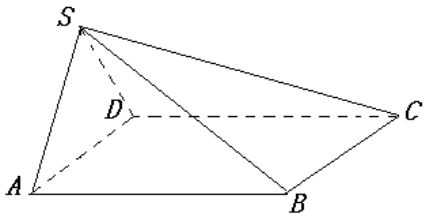
（Ⅲ）若共有 5 个家庭参加家庭抽奖活动．在（Ⅱ）的条件下，记获奖的家庭数为 X，求 X 的分布列及数学期望．

17. （本题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$．底面 $ABCD$ 为矩形，$AD=\sqrt{2}a, AB=\sqrt{3}a$，$SA=SD=a$．

（Ⅰ）求证：$CD\perp SA$；

（Ⅱ）求二面角 $C-SA-D$ 的大小．



18. （本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\dfrac{1-x}{1+x}$（$x\geq 0$，$a$ 为正实数）．

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 的最小值为1，求 a 的取值范围.

19. （本题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，直线 l 过点 $A(4,0)$，$B(0,2)$，且与椭圆 C 相切于点 P.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）是否存在过点 $A(4,0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M 、 N，使得

$36|AP|^2=35|AM|\cdot|AN|$?若存在，试求出直线 m 的方程；若不存在,请说明理由.

20. （本题满分 14 分）

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$（$n=1,2,3,\cdots$）由下列条件确定：①$a_1<0,b_1>0$；②当 $k\geq 2$ 时，a_k 与 b_k 满足：当 $a_{k-1}+b_{k-1}\geq 0$ 时，$a_k=a_{k-1},b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$；当 $a_{k-1}+b_{k-1}<0$ 时，$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，$b_k=b_{k-1}$.

（Ⅰ）若 $a_1=-1$，$b_1=1$，写出 a_2,a_3,a_4，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）在数列 $\{b_n\}$ 中，若 $b_1>b_2>\cdots>b_s$（$s\geq 3$,且 $s\in\mathbf{N}^*$），试用 a_1,b_1 表示 b_k $k\in\{1,2,\cdots,s\}$；

（Ⅲ）在（Ⅰ）的条件下，设数列 $\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $c_1=\frac{1}{2}$，$c_n\neq 0$，

$c_{n+1}=-\frac{2^{2-m}}{ma_m}c_n^{\,2}+c_n$（其中 m 为给定的不小于 2 的整数），求证：当 $n\leq m$ 时，恒有 $c_n<1$.

北京市朝阳区 2011-2012 学年度高三年级第一学期期末统一考试

数学试卷答案（理工类） 2012.1

一、选择题：

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	C	B	A	D	B	C	B	A

二、填空题：

题号	（9）	（10）	（11）	（12）	（13）		（14）	
答案	80	$3\sqrt{3}$	1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	5	8	255	8,13

三、解答题：

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}a-2b\sin A=0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin A=0$， …… 2 分

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……3 分

又 B 为锐角， 则 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知， $B=\frac{\pi}{3}$. 因为 $b=\sqrt{7}$，

根据余弦定理，得 $7=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$， ……7 分

整理，得 $(a+c)^2-3ac=7$.

由已知 $a+c=5$，则 $ac=6$.

又 $a>c$，可得 $a=3$， $c=2$. …… 9 分

于是 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7+4-9}{4\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$， …… 11 分

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=cb\cos A=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=1$. …… 13 分

（16）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 A：某个家庭得分情况为 $(5,3)$.

$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

所以某个家庭得分情况为 $(5,3)$ 的概率为 $\frac{1}{9}$. …… 4 分

（Ⅱ）记事件 B：某个家庭在游戏中获奖，则符合获奖条件的得分包括 $(5,3),(5,5),(3,5)$ 共 3 类情况.

所以 $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

所以某个家庭获奖的概率为 $\frac{1}{3}$. …… 8 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知，每个家庭获奖的概率都是 $\frac{1}{3}$，所以 $X\sim B(5,\frac{1}{3})$.

$P(X=0)=C_5^0(\frac{1}{3})^0\cdot(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}$,

$P(X=1)=C_5^1(\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^4=\frac{80}{243}$,

$P(X=2)=C_5^2(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{2}{3})^3=\frac{80}{243}$,

$P(X=3)=C_5^3(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{40}{243}$,

$P(X=4)=C_5^4(\frac{1}{3})^4\cdot(\frac{2}{3})^1=\frac{10}{243}$,

$P(X=5)=C_5^5(\frac{1}{3})^5\cdot(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{243}$. …… 11 分

所以 X 分布列为：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

所以 $EX=np=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

所以 X 的数学期望为 $\frac{5}{3}$. …… 13 分

（17）（本小题满分 13 分）

证明：（Ⅰ）因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，

$CD\perp AD$，且面 $SAD\cap$ 面 $ABCD=AD$，

所以 $CD\perp$ 平面 SAD.

又因为 $SA\subset$ 平面 SAD

所以 $CD\perp SA$. ····· 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$CD\perp SA$.

在 ΔSAD 中，$SA=SD=a$，$AD=\sqrt{2}a$，

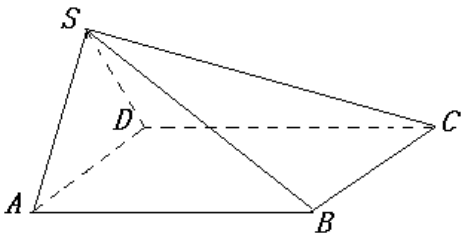
所以 $SA\perp SD$，

所以 $SA\perp$ 平面 SDC.

即 $SA\perp SD$，$SA\perp SC$，

所以 $\angle CSD$ 为二面角 $C-SA-D$ 的平面角.

在 $Rt\Delta CDS$ 中，$\tan\angle CSD=\dfrac{CD}{SD}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$，



所以二面角 $C-SA-D$ 的大小 $\dfrac{\pi}{3}$. ····· 13 分

法二：取 BC 的中点 E，AD 的中点 P.

在 ΔSAD 中，$SA=SD=a$，P 为 AD 的中点，所以，$SP\perp AD$.

又因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$

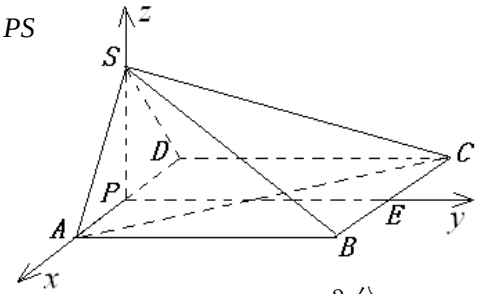
所以，$SP\perp$ 平面 $ABCD$. 显然，有 $PE\perp AD$. ····· 1 分

如图，以 P 为坐标原点，PA 为 x 轴，PE 为 y 轴，PS 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $S(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$，$A(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0)$，

$B(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\sqrt{3}a,0)$，$C(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\sqrt{3}a,0)$，

$D(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0)$. ····· 3 分



（Ⅰ）易知 $\overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{3}a,0),\overrightarrow{SA}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$

因为 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{SA}=0$，

所以 $CD\perp SA$. ····· 6 分

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 CSA 的一个法向量，则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax-\dfrac{\sqrt{2}}{2}az=0\\ \sqrt{2}ax-a\sqrt{3}y=0\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt{3})$. ····· 7 分

显然，$EP\perp$ 平面 SAD，所以 $\overrightarrow{PE}$ 为平面 SAD 的一个法向量，

所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 为平面 SAD 的一个法向量. ····· 9 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以二面角 $C-SA-D$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$. ····· 13 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1-x}{1+x}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-2}{(1+x)^2}$. …… 2 分

所以 $f'(1)=0$.又 $f(1)=\ln 2$，因此所求的切线方程为 $y=\ln 2$. …… 4 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{a}{ax+1}+\dfrac{-2}{(1+x)^2}=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$. …… 5 分

（1）当 $a-2\geq 0$，即 $a\geq 2$ 时，因为 $x\geq 0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. …… 6 分

（2）当 $a-2<0$，即 $0<a<2$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $ax^2+a-2=0$（$x\geq 0$），

所以 $x=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$.

因此，当 $x\in[0,\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})$. …… 10 分

（Ⅲ）当 $a\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$，满足题意. …… 11 分

当 $0<a<2$ 时，由（Ⅱ）知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})$，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})$，而 $f(0)=1$，不合题意.

所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$. …… 13 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题得过两点 $A(4,0)$，$B(0,2)$ 直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$. …… 1 分

因为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$.

设椭圆方程为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$,

由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1,\end{cases}$消去$x$得，$4y^2-12y+12-3c^2=0$.

又因为直线l与椭圆C相切,所以$\Delta=12^2-4\times4(12-3c^2)=0$,解得$c^2=1$.

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ····· 5 分

（Ⅱ）易知直线m的斜率存在,设直线m的方程为$y=k(x-4)$，····· 6 分

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$y$，整理得$(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$. ····· 7 分

由题意知$\Delta=(32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$，

解得$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$. ····· 8 分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ····· 9 分

又直线$l:x+2y-4=0$与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$相切，

由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$解得$x=1,y=\frac{3}{2}$，所以$P(1,\frac{3}{2})$. ····· 10 分

则$|AP|^2=\frac{45}{4}$. 所以$|AM|\cdot|AN|=\frac{36}{35}\times\frac{45}{4}=\frac{81}{7}$.

又$|AM|\cdot|AN|=\sqrt{(4-x_1)^2+y_1^2}\cdot\sqrt{(4-x_2)^2+y_2^2}$

$=\sqrt{(4-x_1)^2+k^2(4-x_1)^2}\cdot\sqrt{(4-x_2)^2+k^2(4-x_2)^2}$

$=(k^2+1)(4-x_1)(4-x_2)$

$=(k^2+1)(x_1x_2-4(x_1+x_2)+16)$

$$=(k^2+1)\left(\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-4\times\frac{32k^2}{3+4k^2}+16\right)$$

$$=(k^2+1)\frac{36}{3+4k^2}.$$

所以$(k^2+1)\frac{36}{3+4k^2}=\frac{81}{7}$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.经检验成立. …… 13 分

所以直线m的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x-4)$. …… 14 分

（20）（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：因为$a_1+b_1=0$，所以$a_2=a_1=-1, b_2=\frac{a_1+b_1}{2}=0$.

因为$a_2+b_2=-1<0$,所以$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=-\frac{1}{2}, b_3=b_2=0$.

因为$a_3+b_3=-\frac{1}{2}<0$,所以$a_4=\frac{a_3+b_3}{2}=-\frac{1}{4}, b_4=b_3=0$.

所以$a_1=-1, a_2=-1, a_3=-\frac{1}{2}, a_4=-\frac{1}{4}$. …… 2 分

由此猜想，当$k\geq 2$时,$a_{k-1}+b_{k-1}<0$，则$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}=\frac{a_{k-1}}{2}$，$b_k=b_{k-1}=0$.… 3 分

下面用数学归纳法证明：

①当$k=2$时，已证成立.

②假设当$k=l$（$l\in\mathbf{N}^*$，且$l\geq 2$）猜想成立，

即$a_{l-1}+b_{l-1}<0$，$b_l=b_{l-1}=0$，$a_l=\frac{a_{l-1}}{2}<0$.

当$k=l+1$时，由$a_l=\frac{a_{l-1}}{2}<0$，$b_l=b_{l-1}=0$得$a_l+b_l<0$，则$b_l=b_{l+1}=0$，

$a_{l+1}=\frac{a_l+b_l}{2}=\frac{a_l}{2}<0$.

综上所述，猜想成立.

所以$a_n=a_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=-\frac{1}{2^{n-2}}(n\geq 2)$.

故$a_n=\begin{cases}-1 & n=1,\\ -\frac{1}{2^{n-2}} & n\geq 2.\end{cases}$ …… 6 分

（Ⅱ）解：当$2\le k\le s$时，假设$a_{k-1}+b_{k-1}<0$，根据已知条件则有$b_k=b_{k-1}$，

与$b_1>b_2>\cdots>b_s$矛盾，因此$a_{k-1}+b_{k-1}<0$不成立，　　…… 7 分

所以有$a_{k-1}+b_{k-1}\ge 0$，从而有$a_k=a_{k-1}$，所以$a_k=a_1$.

当$a_{k-1}+b_{k-1}\ge 0$时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，

所以$b_k-a_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}-a_{k-1}=\dfrac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$；　　…… 8 分

当$2\le k\le s$时，总有$b_k-a_k=\dfrac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$成立.

又$b_1-a_1\ne 0$，

所以数列$\{b_k-a_k\}$（$k=1,2,\cdots,s$）是首项为b_1-a_1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，

$b_k-a_k=(b_1-a_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots,s$，

又因为$a_k=a_1$，所以$b_k=(b_1-a_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}+a_1$.　　…… 10 分

（Ⅲ）证明：由题意得$c_{n+1}=-\dfrac{2^{2-m}}{ma_m}c_n{}^2+c_n$

$=\dfrac{1}{m}c_n{}^2+c_n$.

因为$c_{n+1}=\dfrac{1}{m}c_n{}^2+c_n$，所以$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{m}c_n{}^2>0$.

所以数列$\{c_n\}$是单调递增数列.　　…… 11 分

因此要证$c_n<1(n\le m)$,只须证$c_m<1$.

由$m\ge 2$，则$c_{n+1}=\dfrac{1}{m}c_n{}^2+c_n<\dfrac{1}{m}c_nc_{n+1}+c_n$，即$\dfrac{1}{c_{n+1}}-\dfrac{1}{c_n}>-\dfrac{1}{m}$.…… 12 分

因此$\dfrac{1}{c_m}=(\dfrac{1}{c_m}-\dfrac{1}{c_{m-1}})+(\dfrac{1}{c_{m-1}}-\dfrac{1}{c_{m-2}})+\cdots+(\dfrac{1}{c_2}-\dfrac{1}{c_1})+\dfrac{1}{c_1}$

$>-\dfrac{m-1}{m}+2=\dfrac{m+1}{m}$.

所以$c_m<\dfrac{m}{m+1}<1$.

故当$n \le m$,恒有$c_n < 1$. ……14 分

北京 2011-2012 学年度房山区第一学期期末统测试题

高三数学(理科)

考生须知	1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分, 考试时间为 120 分钟 . 2. 第Ⅰ卷选择题所有答案必须填涂在机读卡上，第Ⅱ卷非选择题直接在试卷上作答. 3. 考试结束后，将机读卡和试卷交回.

第 I 卷 选择题（共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项. ）

1. 已知集合$M=\{0,1,2,3,4\}, N=\{1,3,5\}, P=M\cap N$, 则$P$ 的子集共有（ ）

A. 7 个 B. 6 个 C. 5 个 D. 4 个

2. 已知向量$\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(x,-4)$，若$\vec{a}\ // \ \vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（ ）

A.-10 B.-6 C.0 D.6

3. 已知命题$p: am^2 < bm^2$，命题$q: a<b$，则 p 是 q 的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 极坐标方程$\rho=2\sin\theta$和参数方程$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-t \end{cases}$（$t$为参数）所表示的图形分别为（ ）

A. 圆，圆 B. 圆，直线 C. 直线，直线 D.直线，圆

5. 已知奇函数$f(x)$在区间（－∞，0）内单调递增，且$f(-2)=0$，则不等式$f(x)\le 0$的解集为（ ）

A. $[-2,2]$ B. $(-\infty,-2]\cup(0,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ D. $[-2,0]\cup[2,+\infty)$

6. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=2$，且对任意的正整数p,q都有$a_{p+q}=a_p a_q$，则a_8的值为（ ）

A. 256 B. 128 C. 64 D. 32

7．已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq x \\ x-2y+3\geq 0 \end{cases}$，那么点 P 到直线 $3x-4y-9=0$ 的距离的最小值为(　　)

A. $\frac{14}{5}$　　B. $\frac{6}{5}$　　C.2　　D.1

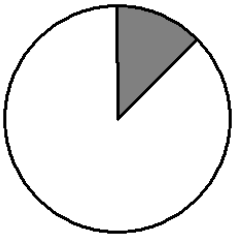
8.已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2-b+1,(a,b\in R)$ 对任意实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，若当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则 b 的取值范围是（　　）

A．$-1<b<0$　　B．$b>2$　　C．$b>2$或$b<-1$　　D．$b<-1$

第 II 卷　非选择题(共 110 分)

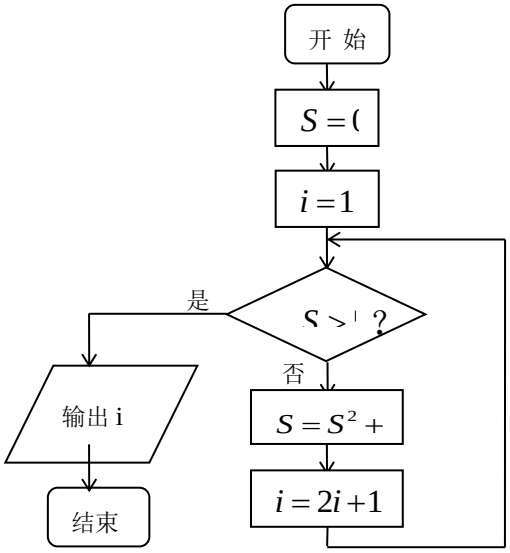
二、填空题（本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题纸上指定位置.）

9．若复数 $\frac{1-2i}{1-i}$ 的实部为 a，虚部为 b，则 $a+b$=_____.

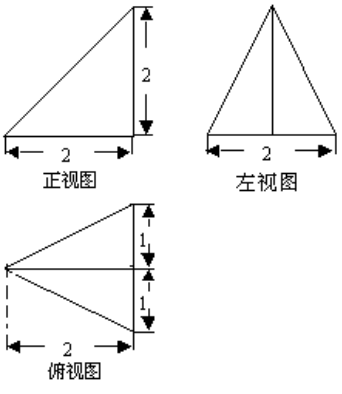


10．如图，有一圆盘, 其中的阴影部分圆心角为 45°，若向圆内投镖，则投中阴影部分的概率为_____.

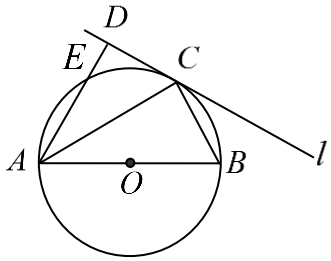
11．某程序框图如图所示，该程序运行后输出的值是_____.



12．已知某个几何体的三视图如图所示，根据图中标出的尺寸（单位：cm），可得这个几何体的体积是_____ cm^3.



13.圆 O 的直径 AB＝6，C 为圆周上一点，BC＝3，过 C 作圆的切线l，则点 A 到直线l的距离 AD 为_____.



14．规定记号“⊗”表示一种运算，即$a\otimes b=\sqrt{ab}+a+b(a,b为正实数)$.若$1\otimes k=3$，则$k$的值为_____，此时函数$f(x)=\dfrac{k\otimes x}{\sqrt{x}}$的最小值为_____.

三、解答题（本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15．（本小题共 13 分）

设函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+2$.

（I）求$f(x)$的最小正周期和值域；

（II）在△ABC中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，若$A=\dfrac{\pi}{3}$，△ABC的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$f(A)$及a的值.

16.（本小题共 13 分）

已知直线$l:4x+3y-8=0$（$a\in R$）过圆 C: $x^2+y^2-ax=0$ 的圆心交圆 C 于 A、B 两点, O 为坐标原点.

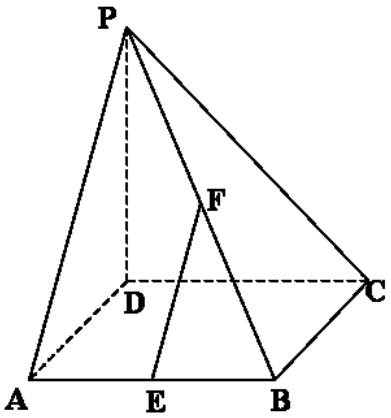
（I）求圆 C 的方程;

(II) 求圆 C 在点 P（1, $\sqrt{3}$）处的切线方程;

(III)求 ΔOAB 的面积.

17.（本小题共 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， PD ⊥底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD=DC=2$， E， F 分别是 AB， PB 的中点.



（Ⅰ）求证： EF // 平面 PAD；

（Ⅱ）求直线 EF 与 CD 所成的角；

（Ⅲ）求二面角 $F-EC-B$ 的余弦值.

18.（本小题共 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$,且$3a_{n+1}+2S_n=3(n\in N^*)$.

(I) 求a_2,a_3的值,并求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(II)若对任意正整数n,$k\le S_n$恒成立,求实数k的最大值.

19.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$， $p\in R$.

（Ⅰ）若 $p=2$，求曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II） 若函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数，求正实数 p 的取值范围；

（III）设函数 $g(x)=f(x)+\frac{2p+2}{x}$，求函数 $g(x)$ 的单调区间.

20.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{2x+3}{3x}$，数列$\{a_n\}$对$n\geq 2, n\in N$总有$a_n=f(\frac{1}{a_{n-1}}), a_1=1$.

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求和：$S_n=a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$；

（III）若数列$\{b_n\}$满足：①$\{b_n\}$为$\{\frac{1}{a_n}\}$的子数列（即$\{b_n\}$中的每一项都是$\{\frac{1}{a_n}\}$的项，且按在$\{\frac{1}{a_n}\}$中的顺序排列）②$\{b_n\}$为无穷等比数列，它的各项和为$\frac{1}{2}$。（定义：若无穷等比数列$\{b_n\}$的公比q满足$|q|<1$且$q\neq 0$，则数列$\{b_n\}$各项和$S=\frac{b_1}{1-q}$）. 这样的数列是否存在？若存在，求出所有符合条件的数列$\{b_n\}$，写出它的通项公式，并证明你的结论；若不存在，说明理由.

房山区 2012 年高三统练参考答案（数学理科）

单选题

1	[D]		6	[A]	
2	[A]		7	[C]	
3	[A]		8	[C]	
4	[B]				
5	[B]				

二、**填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）.**

9. _____1_____.

10. _____$\frac{1}{8}$_____.

11. _____63_____.

12. _____$\frac{4}{3}$_____.

13. _____$\frac{9}{2}$_____.

14. ___1___, ___3___.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）.

15.（本小题共 13 分）

解：（I）∵ $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+2$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+3$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+3$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+3$ ……4 分

∴ $f(x)$ 最小正周期为 $T=\pi$， ……5 分

∵当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z$ 时， $f(x)$ 有最大值 5

当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in z$ 时， $f(x)$ 有最小值 1 ……7 分

∴ $f(x)$ 的值域为[1，5] ……8 分

（II）由（I）可知 $f(A)=2\sin(2A+\frac{\pi}{6})+3$， ……9 分

∴ $f(\frac{\pi}{3})=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+3$

$=2\sin\frac{5\pi}{6}+3$

$=4$ ……11 分

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}bc\sin A$,则 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$， $c=2$，又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$a^2=1^2+2^2-4\cos\frac{\pi}{3}$， a=$\sqrt{3}$ ……13 分

16.（本小题共 13 分）

解：（I）∵圆 C: $x^2+y^2-ax=0$ 的圆心为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$ ……1 分

直线 $l:4x+3y-8=0$ 过圆 C 的圆心

$\therefore 4\times\frac{a}{2}+3\times0-8=0$

$\therefore a=4$ ……3 分

∴圆 C 的方程为：$x^2+y^2-4x=0$ ……4 分

（II）∵点 P（1, $\sqrt{3}$）在 $x^2+y^2-4x=0$ 上，且圆心为 $(2,0)$ ……5 分

∴设过点 P（1, $\sqrt{3}$）的切线 l_1 的斜率为 k，过 P、C 两点的

直线的斜率为 k_{PC}，则 ……6 分

$k_{PC}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-2}=-\sqrt{3}$ ……7 分

∵ $PC\perp l_1$

$\therefore k_{PC}\cdot k$=-1，故 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……8 分

∴切线 l_1 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$，即 $x-\sqrt{3}y+2=0$ ……9 分

（III）∵圆 C: $x^2+y^2-4x=0$ 的半径为 2 ……10 分

$\therefore |BC|=2r=4$ ……11 分

点 O（0，0）到直线 $l:4x+3y-8=0$ 的距离为

$d=\frac{|0+0-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}$ ……12 分

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\times4\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$ ……13 分

17.（本小题共 14 分）

解法 1：（I）∵ E， F 分别是 AB， PB 的中点

∴ EF 为 ΔPAB 的中位线 ……1 分

∴ EF // PA ……2 分

∵ $PA \subset$ 平面 PAD， $EF \not\subset$ 平面 PAD ……4 分

∴ EF // 平面 PAD ……5 分

（II）∵ $PD \perp$ 底面 $ABCD$，

$CD \subseteq$ 平面 $ABCD$

∴ $PD \perp CD$

∵底面 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD \perp CD$

∵ PD， $AD \subseteq$ 平面 $ABCD$， $PD \cap AD = D$

∴ $CD \perp$ 平面 PAD ……7 分

∵ $PA \subseteq$ 平面 PAD

∴ $CD \perp PA$

由（I）知， EF // PA

∴ $EF \perp CD$ ……8 分

∴直线 EF 与 CD 所成的角为 90^0 ……9 分

（III）同解法 1.

17.（本小题共 14 分）

解法 2：（I）$\because PD \perp$底面 $ABCD$， 底面 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore PD$、DC、DA 两两互相垂直 ……1 分

$\therefore$以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 ……2 分

$E(2,1,0)$，$F(1,1,1)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$ ……3 分

直线 EF 的方向向量为 $\overrightarrow{EF}=(-1,01)$，平面 PAD 的法向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ ……4 分

$\because \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=0$

$\therefore EF$ // 平面 PAD ……5 分

（II）（II）由（I）知，直线 EF 的方向向量为 $\overrightarrow{EF}=(-1,01)$， ……6 分

直线 CD 的方向向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$， ……7 分

$\because \cos\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=0$ ……8 分

$\therefore$直线 EF 与 CD 所成的角为 90^0 ……9 分

（III）$P(0,0,2)$，$B(2,2,0)$，$E(2,1,0)$，$F(1,1,1)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$ 故

$\overrightarrow{EC}=(-2,,1,0)$，$\overrightarrow{FC}=(-1,1,-1)$，则平面 ECB 的法向量为 $\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$ ……10 分

设平面 ECF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{FC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，$\begin{cases}-2x+y=0\\ -x+y-z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=2$，z=1

故 $\vec{n}=(1,2,1)$ ……12 分

$\because \cos\left\langle\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DP}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，由图可知，二面角 $F-EC-B$ 为钝角，

$\therefore$二面角 $F-EC-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……14 分

18.（本小题共 13 分）

解:(I) $\because a_1=1$,且$3a_{n+1}+2s_n=3(n\in N^*)$

$\therefore$ 当$n=1$时

$3a_2+2a_1=3$

$\therefore\ a_2=\frac{1}{3}$ ……2 分

$\therefore$当$n=2$时

$3a_3+2(a_1+a_2)=3$

$\therefore a_2=\frac{1}{9}$ ……3 分

$\because 3a_{n+1}+2s_n=3$ ①

$\therefore$当$n\geq 2$时,$3a_n+2s_{n-1}=3$ ②

由①-②, 得$3a_{n+1}-3a_n+2a_n=0$ ……5 分

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}(n\geq 2)$, 又$\because a_1=1, a_2=\frac{1}{3}$, ……7 分

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{3^{n-1}}(n\in \mathrm{N}^*)$ ……8 分

(II)由(I)知$S_n=\frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^n\right]$ ……9 分

由题意可知,对于任意的正整数 n,恒有$k\leq\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ ……10 分

令$f(n)=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$, 当 n=1 时, $f(n)_{\min}=1$ ……12 分

$\therefore$必有 k≤1,即实数 k 的最大值为 1. ……13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（I）解：当 $p=2$ 时，函数 $f(x)=2x-\frac{2}{x}-2\ln x$，　$f(1)=2-2-2\ln 1=0$

$f'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}$，　…… 1 分

曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=2+2-2=2$．　……2 分

从而曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$．…3 分

（II）　$f'(x)=p+\frac{p}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{px^2-2x+p}{x^2}$．（$x>0$）　…… 4 分

解法一：　因为 $f(x)$ 在定义域内是增函数，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，　$f'(x)\geqslant 0$，即 $px^2-2x+p\geq 0$ 恒成立．　……5 分

即 $p\geq\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$ 恒成立．　……6 分

而 $\because x>0,\therefore x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \therefore\ \frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leq 1$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）　……7 分

$\therefore\frac{2x}{x^2+1}\leq 1$　　$\therefore p\geq 1$　　…… 8 分

（III）$g(x)=px+\frac{p+2}{x}-2\ln x\ (x>0)$，

$g'(x)=\frac{px^2-2x-2-p}{x^2}=\frac{(px-2-p)(x+1)}{x^2}$　……9 分

（1）当 $p=0$ 时，$g'(x)=\frac{-2(x+1)}{x^2}<0$ 总成立，

$g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$　……10 分

当 $p\neq 0$ 时，$g'(x)=\frac{p[x-(\frac{2}{p}+1)](x+1)}{x^2}$

（2）当 $p>0$ 时 ，递增区间为 $(\frac{2}{p}+1,+\infty)$ $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\frac{2}{p}+1)$，…11 分

（3）当 $p=-2$ 时，$g'(x)=\frac{-2x(x+1)}{x^2}<0$　总成立，

$g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$　……12 分

（4） 当 $-2<p<0$ 时，$g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$　……13 分

（5） 当 $p<-2$ 时，递增区间为 $(0,\frac{2}{p}+1)$ ，递减区间为 $(\frac{2}{p}+1,+\infty)$　……14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（I）由 $f(x)=\frac{2x+3}{3x}$，又 $a_n=f(\frac{1}{a_{n-1}})=\frac{\frac{2}{a_{n-1}}+3}{\frac{3}{a_{n-1}}}=\frac{2+3a_{n-1}}{3}=a_{n-1}+\frac{2}{3}$ …2 分

所以，$\{a_n\}$是以 $a_1=1$为首项，$\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列，即 $a_n=\frac{2n+1}{3}(n\in N^*)$ ……5 分

（II）当 n 为偶数，$a_{n-1}a_n-a_na_{n+1}=a_n(a_{n-1}-a_{n+1})=-2da_n=-\frac{4}{3}a_n$

所以 $S_n=-\frac{4}{3}(a_2+a_4+\cdots a_n)=-\frac{4}{3}\frac{a_2+a_n}{2}\frac{n}{2}=-\frac{2}{9}n^2-\frac{2}{3}n$ …… 7 分

当 n 为奇数，则 $n-1$为偶数，

$S_n=S_{n-1}+a_na_{n+1}=-\frac{2}{9}(n-1)^2-\frac{2}{3}(n-1)+\frac{2n+1}{3}\frac{2n+3}{3}=\frac{2n^2+6n+7}{9}$ ……..9 分

综上：$S_n=\begin{cases}-\frac{2}{9}n^2-\frac{2}{3}n & n\text{为偶数}\\ \frac{2n^2+6n+7}{9} & n\text{为奇数}\end{cases}$ ……..10 分

（III）设，$b_1=\frac{3}{2k+1}$ 公比，则 $q=\frac{1}{m}>0$ $b_1q^n=\frac{3}{2k+1}\cdot\frac{1}{m^n}=\frac{3}{2p+1}$（$k,p\in N^*$）对任意的 $n\in N^*$ 均成立，故 m 是正奇数，又 S 存在，所以 $m>1$

当 $m=3$时，$S=\frac{1}{2}$，此时 $b_1=\frac{3}{9}$，$b_n=\frac{3}{3^{n+1}}$，成立 ……11 分

当 $m=5$时，$S=\frac{1}{2}$，此时 $b_1=\frac{2}{5}\notin\{\frac{1}{a_n}\}$ 故不成立

$m=7$ 时，$S=\frac{1}{2}$，此时 $b_1=\frac{3}{7}$，$b_n=\frac{3}{7^n}$，成立 ……12 分

当 $m\geq 9$时，$1-\frac{1}{m}\geq\frac{8}{9}$，由 $S=\frac{1}{2}$，得 $b_1\geq\frac{4}{9}$，设 $b_1=\frac{3}{2k+1}$，则 $k\leq\frac{23}{8}$，又因为 $k\in N^*$，所以 $k=1,2$，此时 $b_1=1$或 $b_1=\frac{3}{5}$ 分别代入 $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{2}$，得到 $q<0$ 不合题意

由此，满足条件（3）的 $\{b_n\}$只有两个，即 $b_n=\frac{3}{3^{n+1}}$ 或 $b_n=\frac{3}{7^n}$ ……13 分