东城区普通高中示范校高三综合练习(一)

高三数学（理） 2011. 12

命题学校：北京市第 171 中学

学校： 班级： 姓名： 成绩：

一、选择题：本大题共 8 小题。每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、若 $a>b>0$, 则下列不等式不成立的是（ ）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ B. $|a|>|b|$ C. $a+b<2\sqrt{ab}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

2．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x, x\in\mathbf{R}$，若 $f(x)\geq 1$，则 x 的取值范围为（ ）

A．$\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ B．$\left\{x\left|2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C．$\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\frac{5}{6}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ D．$\left\{x\left|2k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq 2k\pi+\frac{5}{6}\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\frac{m}{n}$ 等于（ ）

A．-2； B．2 C．$-\frac{1}{2}$ D．$\frac{1}{2}$

4．设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(2)=0$，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为（ ）

A．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$ B．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

C．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ D．$(-2,0)\cup(0,2)$

5. 双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，则 r 等于（ ）

A．$\sqrt{3}$ B．2 C．3 D．6

6. 规定 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a, & a<b,\\ b, & b<a,\end{cases}$ 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为（ ）

A．-2　　B．2　　C．-1　　D．1

7.若 $x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$，定义：$M_x^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，例如：$M_{-5}^5=(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)=-120$，则函数 $f(x)=xM_{x-9}^{19}$ 的奇偶性为（　　）

A．是偶函数而不是奇函数　　B．是奇函数而不是偶函数

C．既是奇函数又是偶函数　　D．既不是奇函数又不是偶函数

8、非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足：（1）对任意 a、$b\in G$，都有 $a\oplus b\in G$；（2）存在 $c\in G$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus c=c\oplus a=a$，则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”。现给出下列集合和运算：

①$G=$ {非负整数}，$\oplus$ 为整数的加法。

②$G=$ {偶数}，$\oplus$ 为整数的乘法。

③$G=$ {平面向量}，$\oplus$ 为平面向量的加法。

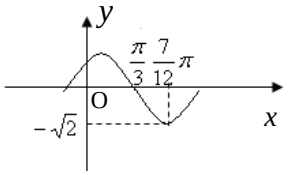
④$G=$ {二次三项式}，$\oplus$ 为多项式的加法。

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是（　　）

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．②④

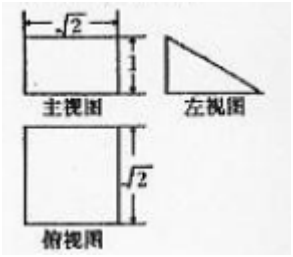
二.填空题(每题 5 分,共 6 小题)

9．“$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的_____条件.



10．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi),(A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0)$ 的部分图象如图所示，则 $f(0)=$_____.

11．设 x,y 是满足 $2x+y=4$ 的正数，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值是_____.



12．若某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是_____.

13．定义在 $\mathbf{R}$ 上的运算：$x*y=x(1-y)$，若不等式 $(x-y)*(x+y)<1$ 对一切实数 x 恒成立，则实数 y 的取值范围是_____.

14．数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若数列 $\{a_n\}$ 的各项按如下规律排列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

有如下运算和结论：

①$a_{24}=\frac{3}{8}$;

②数列$a_1,a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,a_7+a_8+a_9+a_{10},\cdots$是等比数列;

③数列$a_1,a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,a_7+a_8+a_9+a_{10},\cdots$的前 n 项和为$T_n=\frac{n^2+n}{4}$;

④若存在正整数k，使$S_k<10,S_{k+1}\geq 10$,则$a_k=\frac{5}{7}$.

其中正确的结论有_____.（将你认为正确的结论序号都填上）

三、解答题

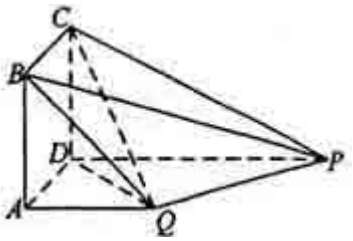
15 （本小题满分 13 分）

在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.

（I） 求ΔABC的面积;

（II） 若$b+c=6$，求a的值.

16. （本小题满分 13 分）



如图，四边形$ABCD$为正方形，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD\ //\ QA$，

$QA=AB=\frac{1}{2}PD$.

（I）证明：平面$PQC\perp$平面DCQ;

（II）求二面角$Q-BP-C$的余弦值.

17.（本小题满分 13 分）

已知 $f(x)=x\ln x, g(x)=-x^2+ax-3.$

（I）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2](t>0)$ 上的最小值；

（II）对一切 $x\in(0,+\infty), 2f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

已知 O 为平面直角坐标系的原点，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 交于 P，Q 两点.

（I）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，求直线 l 的方程；

（II）若 ΔOMP 与 ΔOPQ 的面积相等，求直线 l 的斜率.

19.（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1}-2}\ (n\geq 2, n\in \mathbf{N})$.

（Ⅰ）试判断数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

（Ⅱ）设 $c_n=a_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n．求证：对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\frac{2}{3}$.

20.（本小题满分 14 分）

若 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$，$x\in\mathbf{R}$，$p_1, p_2$ 为常数，

且 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & f_1(x)\leq f_2(x), \\ f_2(x), & f_1(x)>f_2(x). \end{cases}$

（Ⅰ）求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件（用 p_1, p_2 表示）；

（Ⅱ）设 a, b 为两实数，$a<b$ 且 $p_1, p_2\in(a,b)$，若 $f(a)=f(b)$

求证：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$（闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$）.

东城区示范校综合练习(一)

高三数学答案 （理） 2011 年 12 月

一、选择题

1．C 2．B 3．C 4．D 5．A 6．D 7．A 8．B

二、填空题

9．必要非充分条件 10．$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 11．$\lg 2$ 12．1 13．$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 14．①③④

三、解答题

15 （本小题满分 13 分）

在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.

（I）求ΔABC的面积；

（II）若$b+c=6$，求a的值.

解：（I）因为$\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\cos A=\frac{3}{5}$，又$0<A<\pi$,所以$\sin A=\frac{4}{5}$.

由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，得$bc\cos A=3$, 所以$bc=5$.

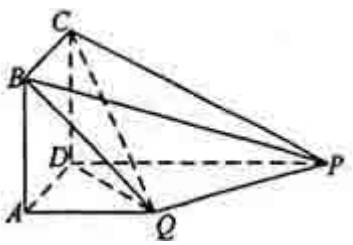
故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2$ . .....6 分

（II）由$bc=5$，且$b+c=6$，解得$\begin{cases}b=5,\\c=1,\end{cases}$或$\begin{cases}b=1,\\c=5.\end{cases}$

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=20$，故$a=2\sqrt{5}$ .....13 分

16. （本小题满分 13 分）

如图，四边形$ABCD$为正方形，PD⊥平面$ABCD$，$PD\ /\!/\ QA$，$QA=AB=\frac{1}{2}PD$.



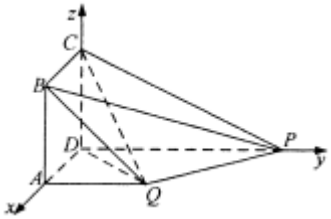
（I）证明：平面 PQC ⊥平面 DCQ；

（II）求二面角 $Q-BP-C$ 的余弦值.

解：（I）如图，以 D 为坐标原点，线段 DA 的长为单位长，射线 DA 为 x 轴的正半轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

依题意有 Q（1，1，0），C（0，0，1），P（0，2，0）.

则 $\overrightarrow{DQ}=(1,1,0),\overrightarrow{DC}=(0,0,1),\overrightarrow{PQ}=(1,-1,0)$.



所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

即 $PQ\perp DQ,PQ\perp DC$,

故 PQ ⊥平面 DCQ.

又 $PQ\subset$平面 PQC，所以平面 PQC ⊥平面 DCQ. ……6 分

（II）依题意有 B（1，0，1），$\overrightarrow{CB}=(1,0,0),\overrightarrow{BP}=(-1,2,-1)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PBC 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -x+2y-z=0.\end{cases}$

因此可取 $\vec{n}=(0,-1,-2)$.

设 $\vec{m}$ 是平面 PBQ 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=0.\end{cases}$

可取 $\vec{m}=(1,1,1)$,所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=-\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故二面角 $Q-BP-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……13 分

17. （本小题满分 13 分）

已知 $f(x)=x\ln x,g(x)=-x^2+ax-3$.

（I）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2](t>0)$ 上的最小值；

（II）对一切 $x\in(0,+\infty),2f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1） $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\ln x+1$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增. ……2 分

①当 $0<t<t+2<\frac{1}{e}, t$ 无解；……3 分

②当 $0<t<\frac{1}{e}<t+2$，即 $0<t<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$； ……4 分

③当 $\frac{1}{e}\le t<t+2$ 即 $t\ge\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(t)=t\ln t$；

……5 分

所以 $f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{e}, & 0<t<\frac{1}{e},\\ t\ln t, & t\ge\frac{1}{e}.\end{cases}$ ……6 分

（2）$2x\ln x\ge -x^2+ax-3$，则 $a\le 2\ln x+x+\frac{3}{x}$，对一切 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. ……7 分

设 $h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，

当 $x\in(0,1), h'(x)<0, h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty), h'(x)>0, h(x)$ 单调递增. ……10 分

$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上，有唯一极小值 $h(1)$，即为最小值.

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=4$，因为对一切 $x\in(0,+\infty), 2f(x)\ge g(x)$ 恒成成立，

所以 $a\le h(x)_{\min}=4$. ……13 分

18.（本小题满分 13 分）

已知 O 为平面直角坐标系的原点，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 交于 P,Q 两点.

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，求直线 l 的方程；

（Ⅱ）若ΔOMP与ΔOPQ的面积相等，求直线l的斜率.

解：（Ⅰ）依题意，直线l的斜率存在，

因为 直线l过点$M(-2,0)$，可设直线l： $y=k(x+2)$.

因为P,Q两点在圆$x^2+y^2=1$上，所以 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=1$，

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\cos\angle POQ=-\frac{1}{2}$.

所以 $\angle POQ=120^{\circ}$　　所以 O到直线l的距离等于$\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$，　　得$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$.

所以　直线l的方程为$x-\sqrt{15}y+2=0$或$x+\sqrt{15}y+2=0$.　　……6分

（Ⅱ）因为ΔOMP与ΔOPQ的面积相等，所以$\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，

设 $P(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$，所以 $\overrightarrow{MQ}=(x_2+2,y_2)$， $\overrightarrow{MP}=(x_1+2,y_1)$.

所以$\begin{cases}x_2+2=2(x_1+2),\\ y_2=2y_1,\end{cases}$　即$\begin{cases}x_2=2(x_1+1),\\ y_2=2y_1.\end{cases}$　（*）

因为　P，Q两点在圆上，所以$\begin{cases}x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=1,\\ x_2^{\,2}+y_2^{\,2}=1.\end{cases}$

把（*）代入得$\begin{cases}x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=1,\\ 4(x_1+1)^2+4y_1^{\,2}=1.\end{cases}$　所以　$\begin{cases}x_1=-\frac{7}{8},\\ y_1=\pm\frac{\sqrt{15}}{8}.\end{cases}$

故直线l的斜率$k=k_{MP}=\pm\frac{\sqrt{15}}{9}$，　即$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{9}$.　　……13分

19、（本小题满分14分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{4}$， $a_n=\frac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1}-2}\ (n\geq 2,n\in\mathbf{N})$.

（Ⅰ）试判断数列$\left\{\frac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$是否为等比数列，并说明理由；

（Ⅱ）设$c_n=a_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$．求证：对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\frac{2}{3}$．

解（1）由已知$a_n=\frac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1}-2}$得$\frac{1}{a_n}=\frac{(-1)^n a_{n-1}-2}{a_{n-1}}=(-1)^n-\frac{2}{a_{n-1}}$，

$\frac{1}{a_n}+(-1)^n=2\cdot(-1)^n-\frac{2}{a_{n-1}}=-2[\frac{1}{a_{n-1}}+(-1)^{n-1}]$．又$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{3}{4}\neq 0$，

故$\left\{\frac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$为公比为-2的等比数列.　　……7分

（2）由（1）得$\frac{1}{a_n}+(-1)^n=(4-1)\cdot(-2)^{n-1}=3\cdot(-2)^{n-1}$．

所以$\frac{1}{a_n}=3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n$，$a_n=\frac{1}{3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n}$，

$c_n=a_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{1}{3\cdot(-2)^{n-1}-(-1)^n}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}<\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$．

所以$T_n<\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^n]<\frac{2}{3}$．　　……14分

20.（本小题满分14分）

若$f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$，$x\in\mathbf{R}$，$p_1,p_2$为常数，

且$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & f_1(x)\le f_2(x),\\ f_2(x), & f_1(x)>f_2(x).\end{cases}$

（Ⅰ）求$f(x)=f_1(x)$对所有实数成立的充要条件（用p_1,p_2表示）；

（Ⅱ）设a,b为两实数，$a<b$且$p_1,p_2\in(a,b)$,若$f(a)=f(b)$

求证：$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度和为$\frac{b-a}{2}$（闭区间$[m,n]$的长度定义为$n-m$）．

解：（Ⅰ）$f(x)=f_1(x)$恒成立

$\Leftrightarrow f_1(x)\le f_2(x)\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|}\le 2\cdot 3^{|x-p_2|}\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\le 3^{\log_3 2}$;

$\Leftrightarrow |x-p_1|-|x-p_2|\le log_3 2$ （*）

因为$|x-p_1|-|x-p_2|\le|(x-p_1)-(x-p_2)|=|p_1-p_2|$，

所以，故只需$|p_1-p_2|\le log_3 2$（*）恒成立.

综上所述，$f(x)=f_1(x)$对所有实数成立的充要条件是$|p_1-p_2|\le log_3 2$. .....4 分

（Ⅱ）1°如果$|p_1-p_2|\le log_3 2$，则的图象关于直线$x=p_1$对称．因为$f(a)=f(b)$，所以区间$[a,b]$关于直线$x=p_1$对称.

因为减区间为$[a,p_1]$，增区间为$[p_1,b]$，所以单调增区间的长度和为$\frac{b-a}{2}$. .....6 分

2°如果$|p_1-p_2|>log_3 2$.

（1）当$p_1-p_2>log_3 2$时. $f_1(x)=\begin{cases}3^{x-p_1},x\in[p_1,b]\\3^{p_1-x},x\in[a,p_1]\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}3^{x-p_2+\log_3 2},x\in[p_2,b]\\3^{p_2-x+\log_3 2},x\in[a,p_2]\end{cases}$

当$x\in[p_1,b]$，$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=3^{p_2-p_1-\log_3 2}<3^0=1$, 因为$f_1(x)>0, f_2(x)>0$，所以$f_1(x)<f_2(x)$，故$f(x)=f_1(x)=3^{x-p_1}$.

当$x\in[a,p_2]$，$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=3^{p_1-p_2-\log_3 2}>3^0=1$, 因为$f_1(x)>0, f_2(x)>0$，所以$f_1(x)>f_2(x)$，故$f(x)=f_2(x)=3^{p_2-x+\log_3 2}$.

因为$f(a)=f(b)$，所以$3^{b-p_1}=3^{p_2-a+\log_3 2}$，所以$b-p_1=p_2-a+\log_3 2$, 即$a+b=p_1+p_2+\log_3 2$.

当$x\in[p_2,p_1]$时，令$f_1(x)=f_2(x)$，则$3^{p_1-x}=3^{x-p_2+\log_3 2}$，所以$x=\frac{p_1+p_2-\log_3 2}{2}$，

当$x\in\left[p_2,\frac{p_1+p_2-\log_3 2}{2}\right]$时，$f_1(x)\ge f_2(x)$，所以$f(x)=f_2(x)=3^{x-p_2+\log_3 2}$;

$x\in\left[\dfrac{p_1+p_2-\log_3 2}{2},p_1\right]$时，$f_1(x)\le f_2(x)$，所以$f(x)=f_1(x)=3^{p_1-x}$.

$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度和$b-p_1+\dfrac{p_1+p_2-\log_3 2}{2}-p_2$

$=b-\dfrac{p_1+p_2+\log_3 2}{2}=b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$. .....10 分

（2）当 $p_2-p_1>log_3 2$时. $f_1(x)=\begin{cases}3^{x-p_1},x\in[p_1,b]\\3^{p_1-x},x\in[a,p_1]\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}3^{x-p_2+\log_3 2},x\in[p_2,b]\\3^{p_2-x+\log_3 2},x\in[a,p_2]\end{cases}$

当$x\in[p_2,b]$，$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=3^{p_2-p_1-\log_3 2}>3^0=1$, 因为$f_1(x)>0,f_2(x)>0$，所以$f_1(x)>f_2(x)$，故

$f(x)=f_2(x)=3^{x-p_2+\log_3 2}$.

当$x\in[a,p_1]$，$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=3^{p_1-p_2-\log_3 2}<3^0=1$, 因为$f_1(x)>0,f_2(x)>0$，所以$f_1(x)<f_2(x)$，故

$f(x)=f_1(x)=3^{p_1-x}$.

因为$f(a)=f(b)$，所以$3^{p_1-a}=3^{b-p_2+\log_3 2}$，所以$a+b=p_1+p_2-\log_3 2$.

当$x\in[p_1,p_2]$时，令$f_1(x)=f_2(x)$，则$3^{x-p_1}=3^{p_2-x+\log_3 2}$，所以$x=\dfrac{p_1+p_2+\log_3 2}{2}$，

当$x\in\left[p_1,\dfrac{p_1+p_2+\log_3 2}{2}\right]$时，$f_1(x)\le f_2(x)$，所以$f(x)=f_1(x)=3^{x-p_1}$;

$x\in\left[\dfrac{p_1+p_2+\log_3 2}{2},p_1\right]$时，$f_1(x)\ge f_2(x)$，所以$f(x)=f_2(x)=3^{p_2-x+\log_3 2}$;

$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度和$b-p_2+\dfrac{p_1+p_2+\log_3 2}{2}-p_1$

$=b-\dfrac{p_1+p_2-\log_3 2}{2}=b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$.

综上得$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度和为$\dfrac{b-a}{2}$. .....14 分