高 三 数 学月考

2011.09

（测试时间：120 分钟）

一 、选择题（本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

（1）已知$U=\{y\mid y=\log_2 x,\ x>1\}$，$P=\left\{y\middle| y=\frac{1}{x},\ x>2\right\}$，则$C_U P=$（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

（2）下面四个条件中，使 $a>b$ 成立的必要而不充分条件是（　　）

A. $a>b+1$　　B. $a>b-1$　　C. $a^2>b^2$　　D. $a^3>b^3$

（3）命题 “$\forall x\in R,\ x>\sin x$” 的否定是（　　）

A. $\exists x\in R,\ x<\sin x$　B. $\forall x\in R,\ x\le\sin x$　C. $\exists x\in R,\ x\le\sin x$　D. $\forall x\in R,\ x<\sin x$

（4）设 $a=\log_3\pi$，$b=\log_2\sqrt{3}$，$c=\log_3\sqrt{2}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

（5）函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的图象关于（　　）

A. x 轴对称　　B. y 轴对称　　C. 原点对称　　D. 直线 $y=x$ 对称

（6）函数 $f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ 在$[0,+\infty)$内（　　）

A. 没有零点　　B. 有且仅有一个零点　　C. 有且仅有两个零点　　D. 有无穷多个零点

（7）设偶函数满足 $f(x)=x^3-8(x\ge 0)$，则 $\{x\mid f(x-2)>0\}$ 为（　　）

A. $\{x\mid x<-2\text{或}x>4\}$　B. $\{x\mid x<0\text{或}x>4\}$　C. $\{x\mid x<0\text{或}x>6\}$　D. $\{x\mid x<-2\text{或}x>2\}$

（8）对于函数 $f(x)=2\sin x\cos x$，下列选项中正确的是（　　）

A. $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上递增　　B. $f(x)$的最大值为2

C. $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称　　D. $f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$对称

（9）设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点M,N，则当 $|MN|$

达到最小时 t 的值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二 、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 把答案填在题中横线上）

（10）函数 $y=3-3x-\frac{1}{x}\ (x>0)$ 的最大值为 _____.

（11） 函数 $f(x)=-x^2+|x|$ 的单调递减区间是_____；值域为_____.

（12）由直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ $x=\frac{\pi}{3}$， $y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 _____.

（13）在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v m/s 和燃料的质量 M kg 、火箭（除燃料外）的质量 m kg 的函数关系是 $v=2000\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的_____倍时，火箭的最大速度可达 12 km/s.

（14）若 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$， $\sin\alpha=\frac{3}{5}$， $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$_____.

（15） 曲线 $y=x^3$ 在点 (a,a^3) $(a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$，则 $a=$_____.

（16）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x & (x\le 1)\\ 3+\log_{\frac{1}{3}}x & (x>1)\end{cases}$，若关于 x 的方程 $|f(x)|=k$ 有三个不同的实根，则实数 k 的取值范围是 _____.

（17）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ (x\in[-2,2])$ 的图象过原点，且在 $x=\pm 1$ 处的切线的倾斜角均为 $\frac{3\pi}{4}$，现有以下三个命题：　① $f(x)=x^3-4x\ (x\in[-2,2])$；
② $f(x)$ 的极值点有且只有一个；　③ $f(x)$ 的最大值与最小值之和为零.
其中真命题的序号是_____.

三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 13 分，共 65 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

（18）已知 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$， $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

（I） 求 $\sin x$ 的值；　（II）求 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

（19）已知 $x=3$ 是函数 $f(x)=a\ln(1+x)+x^2-10x$ 的一个极值点．求

（I）实数 a 的值；　（II）函数 $f(x)$ 的单调区间.

（20）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x}\left(x-a\right)\ \left(a\in R\right)$.

（Ⅰ）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g(a)$ 为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上的最小值，求出 $g(a)$ 的表达式.

（21）已知函数 $f(x)=(-x^2+ax)e^x\ (a\in R)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，求 a 的取值范围.

（22）对于定义域为 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$，若同时满足以下三个条件：

① $f(1)=1$； ② $\forall x\in[0,1]$, 总有 $f(x)\geq 0$； ③ 当 $x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_1+x_2\leq 1$ 时，都有 $f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 为理想函数.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 为理想函数，求 $f(0)$.

（Ⅱ）判断函数 $g(x)=2^x-1\ (x\in[0,1])$ 和函数 $h(x)=\sin\frac{\pi}{2}x\ (x\in[0,1])$ 是否为理想函数？若是，予以证明；若不是，说明理由.

（III）设函数 $f(x)$ 为理想函数，若 $\exists x_0\in[0,1]$，使 $f(x_0)\in[0,1]$，且 $f[f(x_0)]=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.