北京市 101 中学 2009-2010 学年上学期高二年级期中考试数学试卷
（理科）

考试时间：100 分钟　　试卷满分：120 分

注意事项：答题前，考生务必将自己的班级、姓名、考试号写在答题纸的密封线内．答题时，答案写在答题纸上对应题目的空格内，答案写在试卷上无效．本卷考试结束后，上交答题纸.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项

1．已知命题 p: $\exists x \in R$，使 $\tan x = 1$，其中正确的是

(A) $\neg p$: $\exists x \in R$，使 $\tan x \neq 1$　　(B) $\neg p$: $\exists x \notin R$，使 $\tan x \neq 1$

(C) $\neg p$: $\forall x \in R$，使 $\tan x \neq 1$　　(D) $\neg p$: $\forall x \notin R$，使 $\tan x \neq 1$

2．双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是

（A）$y = \pm\frac{3}{2}x$　（B）$y = \pm\frac{2}{3}x$　（C）$y = \pm\frac{9}{4}x$　（D）$y = \pm\frac{4}{9}x$

3．已知△ABC 的周长为 20，且顶点 B (0，－4)，C (0，4)，则顶点 A 的轨迹方程是

（A）$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$（$x$≠0）　（B）$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$（$x$≠0）

（C）$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{20} = 1$（$x$≠0）　（D）$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{6} = 1$（$x$≠0）

4．抛物线 $y^2 = 4ax(a < 0)$ 的焦点坐标是

（A）（0，$-a$）　（B）($-a$, 0)　（C）（0，a）　（D）（a , 0）

5．直线 $y = k(x+2) + \frac{1}{2}$ 与曲线 $y^2 = x$ 只有一个公共点，则 k =

（A）$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$　（B）$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{4}$

6．以下有四种说法，其中正确说法的个数为：

（1）“m 是实数”是“m 是有理数”的充分不必要条件；

（2）“$a > b$”是“$a^2 > b^2$”的充要条件；

（3）“$x = 3$”是“$x^2 - 2x - 3 = 0$”的必要不充分条件；

（4）“$A \cap B = B$”是“$A = \phi$”的必要不充分条件.

（A）0 个　（B）1 个　（C）2 个　（D） 3 个

7．抛物线的顶点在坐标原点，抛物线的焦点和椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点重合，则抛物线的标准方程为

(A) $y^2 = 16x$　(B) $y^2 = 8x$　(C) $y^2 = 12x$　(D) $y^2 = 6x$

8．椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2，过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点为 P，则 $|\overrightarrow{PF_2}|$

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\frac{7}{2}$　　（D）4

9．已知圆 $F_1:(x+2)^2+y^2=1$，圆 $F_2:(x-2)^2+y^2=4$，动圆与圆 F_1 内切且与圆 F_2 外切，则动圆圆心的轨迹方程是

(A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$　　(B) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1\ (x\le -3)$

(C) $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1$　　(D) $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1\ (x\le -\frac{3}{2})$

10．若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点，那么 k 的取值范围是

（A）$(-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3})$　　（B）$(0,\frac{\sqrt{15}}{3})$　　（C）$(-\frac{\sqrt{15}}{3},0)$　　（D）$(-\frac{\sqrt{15}}{3},-1)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在答题纸上。

11．抛物线 $y^2=8x$ 上一个点 P（P 在 x 轴上方）到焦点的距离是 8，此时 P 点的坐标是_____

12．命题“若 $x\le 1$，则 $-1<x<1$”的否命题是: _____ .

13．若方程 $\frac{x^2}{2-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ 表示的图形是双曲线，则 k 的取值范围为_____.

14．双曲线 $x^2-y^2=1$ 左支上一点 (a,b) 到其渐近线 $y=x$ 的距离是 $\sqrt{2}$，则 $a+b$ 的值为_____

15．如果椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 的弦被点(4，2)平分，则这条弦所在的直线方程是_____

_____

16．P 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1、F_2 为左右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，则△ F_1PF_2 的面积为_____

三、解答题：本大题共 5 小题，共 50 分 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17．（本题满分 12 分）设 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

18.（本题满分 12 分）已知椭圆的顶点与双曲线$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$的焦点重合，它们的离心率之和为$\frac{13}{5}$，若椭圆的焦点在 x 轴上，求椭圆的标准方程.

19.（本题满分 12 分）已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，点$M\left(2,y_0\right)$在抛物线上，$\left|MF\right|=\frac{5}{2}$

（1）求抛物线方程

（2）设 A 点坐标为$\left(\frac{2}{3},0\right)$，求抛物线上距点 A 最近的点 B 的坐标及相应的距离$\left|BA\right|$；

20. （本题满分 14 分）设$m\in R$,在平面直角坐标系中,已知向量$\vec{a}=(mx,y+1)$,向量$\vec{b}=(x,y-1),\vec{a}\perp\vec{b}$,动点$M(x,y)$的轨迹为 E.

（1）求轨迹 E 的方程,并说明该方程所表示曲线的形状;

（2）已知$m=\frac{1}{4}$,证明:存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与轨迹 E 恒有两个交点 A,B,且$OA\perp OB$(O 为坐标原点),并求出该圆的方程;

(3)已知$m=\frac{1}{4}$,设直线l与圆 C:$x^2+y^2=R^2$(1<R<2)相切于 A_1,且l与轨迹 E 只有一个公共点 B_1,当 R 为何值时,$|A_1B_1|$取得最大值?并求最大值.

北京一零一中 2009－2010 学年度第一学期期中考试参考答案

高 二 数 学（理科）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	D	B	A	A	C	D	D

二、填空题(每小题 5 分,共 30 分)

11. $\left(6,4\sqrt{3}\right)$　　**12.** 若 $x>1$，则 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$

13. $\{k\mid k<1\text{或}k>2\}$　　**14.** $-\dfrac{1}{2}$

15. $x+2y-8=0$　　**16.** $3\sqrt{3}$

三、解答题(本题 50 分)

17. （本题满分 12 分）设 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

解：若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\ x_1+x_2=-m<0\end{cases}$，　……2 分

所以 $m>2$，即 $p:m>2$.　……3 分

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，则 $\Delta=16(m-2)^2-16<0$，　…5 分

即 $1<m<3$，　所以 $p:1<m<3$.　……6 分

因为 $p\vee q$ 为真，则 p,q 至少一个为真，又 $p\wedge q$ 为假，则 p,q 至少一个为假.

所以 p,q 一真一假，即“p 真 q 假”或“p 假 q 真”.　……7 分

所以 $\begin{cases}m>2\\ m\le 1\text{或}m\ge 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\le 2\\ 1<m<3\end{cases}$　……8 分

所以 $m\ge 3$ 或 $1<m\le 2$.

故实数 m 的取值范围为 $(1,2]\cup[3,+\infty)$.　……10 分

18.（本题满分 12 分）已知椭圆的顶点与双曲线 $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{12}=1$ 的焦点重合，它们的离心率之和为 $\dfrac{13}{5}$，若椭圆的焦点在 x 轴上，求椭圆的方程.

18.解：设所求椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其离心率为$e$，焦距为$2c$，

双曲线$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$的焦距为$2c_1$，离心率为$e_1$， 2 分

则有：$c_1^2=4+12=16$，$c_1=4$ 4 分

$\therefore e_1=\frac{c_1}{2}=2$ （6 分）

$\therefore e=\frac{13}{5}-2=\frac{3}{5}$，即$\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ ① 8 分

又$b=c_1=4$ ② 9 分

$a^2=b^2+c^2$ ③ 10 分

由①、 ②、③可得$a^2=25$

$\therefore$ 所求椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 12 分

19.（本题满分 12 分）已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，点$M\left(2,y_0\right)$在抛物线上，$\left|MF\right|=\frac{5}{2}$

（1）求抛物线方程

（2）设A点坐标为$\left(\frac{2}{3},0\right)$，求抛物线上距点$A$最近的点$B$的坐标及相应的距离$\left|BA\right|$；

19.解：（1）$\left|MF\right|=x_M+\frac{p}{2}=2+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$ 所以$p=1$ 4 分

故抛物线方程为$y^2=2x$ 5 分

（2）设$y^2=2x$上任一点$M(x,y)$

$\left|AM\right|^2=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(x\geq 0)$ 8 分

所以当$x=0$时，$\left|AM\right|_{\min}^2=\frac{4}{9}$ 10 分

所以$\left|AB\right|=\frac{2}{3}$，此时$B\left(0,0\right)$ 12 分

20. （本题满分 14 分） 设$m\in R$,在平面直角坐标系中,已知向量$\vec{a}=(mx,\ y+1)$,向量$\vec{b}=(x,\ y-1)$,$\vec{a}\perp\vec{b}$,动点$M(x,y)$的轨迹为 E.

（1）求轨迹 E 的方程,并说明该方程所表示曲线的形状;

（2）已知$m=\frac{1}{4}$,证明:存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与轨迹 E 恒有两个交点 A,B,且$OA\perp OB$(O 为坐标原点),并求出该圆的方程;

(3)已知$m=\frac{1}{4}$,设直线l与圆 C:$x^2+y^2=R^2$(1<R<2)相切于 A_1,且l与轨迹 E 只有一个公共点 B_1,当 R 为何值时,$|A_1B_1|$取得最大值?并求最大值.

20.解:（1）因为$\vec{a}\perp\vec{b}$,$\vec{a}=(mx,y+1)$,$\vec{b}=(x,y-1)$,

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=mx^2+y^2-1=0$,即$mx^2+y^2=1$.　　当 m=0 时,方程表示两直线,方程为$y=\pm1$;

当$m=1$时, 方程表示的是圆　　当$m>0$且$m\neq1$时,方程表示的是椭圆;

当$m<0$时,方程表示的是双曲线.　4 分

(2).当$m=\frac{1}{4}$时, 轨迹 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,设圆心在原点的圆的一条切线为$y=kx+t$,

解方程组$\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得$x^2+4(kx+t)^2=4$,即$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$,

要使切线与轨迹 E 恒有两个交点 A,B,

则使△=$64k^2t^2-16(1+4k^2)(t^2-1)=16(4k^2-t^2+1)>0$,

即$4k^2-t^2+1>0$,即$t^2<4k^2+1$,　　且$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8kt}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$

$y_1y_2=(kx_1+t)(kx_2+t)=k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2=\frac{k^2(4t^2-4)}{1+4k^2}-\frac{8k^2t^2}{1+4k^2}+t^2=\frac{t^2-4k^2}{1+4k^2}$,

要使$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,　需使$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$\frac{4t^2-4}{1+4k^2}+\frac{t^2-4k^2}{1+4k^2}=\frac{5t^2-4k^2-4}{1+4k^2}=0$,

所以$5t^2-4k^2-4=0$,　即$5t^2=4k^2+4$且$t^2<4k^2+1$,　即$4k^2+4<20k^2+5$恒成立.

所以又因为直线$y=kx+t$为圆心在原点的圆的一条切线,所以圆的半径为

$r=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,$r^2=\frac{t^2}{1+k^2}=\frac{\frac{4}{5}(1+k^2)}{1+k^2}=\frac{4}{5}$, 所求的圆为$x^2+y^2=\frac{4}{5}$.当切线的斜率不存在

时,切线为 $x=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$,与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于点 $(\frac{2}{5}\sqrt{5},\pm\frac{2}{5}\sqrt{5})$ 或 $(-\frac{2}{5}\sqrt{5},\pm\frac{2}{5}\sqrt{5})$ 也满足 $OA\perp OB$.综上, 存在圆心在原点的圆 $x^2+y^2=\frac{4}{5}$，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B,且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 10 分

(3)当 $m=\frac{1}{4}$ 时,轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,设直线 l 的方程为 $y=kx+t$,因为直线 l 与圆 C: $x^2+y^2=R^2$ (1<R<2)相切于 A_1, 由（2）知 $R=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$， 即 $t^2=R^2(1+k^2)$ ①,

因为 l 与轨迹 E 只有一个公共点 B_1,由（2）知 $\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $x^2+4(kx+t)^2=4$,

即 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$ 有唯一解则 $\Delta=16\left(4k^2-t^2+1\right)=0$ 即 $4k^2-t^2+1=0$,

② 由①②得 $\begin{cases}t^2=\frac{3R^2}{4-R^2}\\ k^2=\frac{R^2-1}{4-R^2}\end{cases}$， 此时 A,B 重合为 $B_1(x_1,y_1)$ 点， 由

$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8kt}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$

中 $x_1=x_2$,所以, $x_1^2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}=\frac{16R^2-16}{3R^2}$， $B_1(x_1,y_1)$ 点在椭圆上,所以 $y_1^2=1-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{4-R^2}{3R^2}$,所以 $|OB_1|^2=x_1^2+y_1^2=5-\frac{4}{R^2}$,在直角三角形 OA_1B_1 中, $|A_1B_1|^2=|OB_1|^2-|OA_1|^2=5-\frac{4}{R^2}-R^2=5-(\frac{4}{R^2}+R^2)$ 因为 $\frac{4}{R^2}+R^2\geq 4$ 当且仅当 $R=\sqrt{2}\in(1,2)$ 时取等号,所以 $|A_1B_1|^2\leq 5-4=1$,即当 $R=\sqrt{2}\in(1,2)$ 时$|A_1B_1|$取得最大值, 最大值为 1. 14 分